双子素数は無限個存在する（試論）

―― Euler積と対数の級数展開式による ――

宇都宮 潔

2025年1月19日

直近2原稿を補正し，その歩みをもう一歩進めてみることが出来ないか，を考察してみた.

①「Littelwoodの定理：li(x)−π(x)の無限回符号が変わる」は従来の解釈 π(x)～x/log xでは検出できないが，π(x)～x/(log x −1)ならMarek Wolfの双子素数に対する実験から検出できることが証明できた.『素数定理の誤差評価(補正版)』『双子素数予想式の評価など(補正版)』を参照のこと.

② 双子素数の逆2乗べき和を求める計数公式は何か？

③ 双子素数の無限個存在証明のためにEuler積と対数展開を利用.その際の級数展開式は，一様収束・絶対収束から項の移行が可能なので？

② 双子素数予想式では，不等式 $\ln^2 x<\ln x\ln(x+2)<\ln^2(x+1)$ により積分を得た.
これを「双子素数の逆2n乗べき和の計算」(後述③＊)に利用できないか，を考えるために以下の計算をしてみた:

$$\frac{\ln x+\ln(x+2)}{2}>\sqrt{\ln x\ln(x+2)}$$

$$左辺=\frac{1}{2}\ln x(x+2)=\frac{1}{2}\ln\{(x+1)^2-1\}<\frac{1}{2}\ln(x+1)^2=\ln(x+1)$$

$\ln^2(x+1)>\ln x\ln(x+2)>\ln^2 x$ …(＊)から，

(1.1) $$\int_2^x\frac{dx}{\ln^2 x}>\int_2^x\frac{dx}{\ln x\ln(x+2)}>\int_2^x\frac{dx}{\ln^2(x+1)}.$$

不等式(＊)全体を2乗して，$\ln^4(x+1)>\ln^2 x\ln^2(x+2)>\ln^4 x$ から，

(1.2) $$\int_2^x\frac{dx}{\ln^4 x}>\int_2^x\frac{dx}{\ln^2 x\ln^2(x+2)}>\int_2^x\frac{dx}{\ln^4(x+1)}.$$

不等式(＊)全体をs乗して，$\ln^{2s}(x+1)>\ln^s x\ln^s(x+2)>\ln^{2s}x$ から，

(1.3) $$\int_2^x\frac{dx}{\ln^{2s}x}>\int_2^x\frac{dx}{\ln^s x\ln^s(x+2)}>\int_2^x\frac{dx}{\ln^{2s}(x+1)};\ s=1,2,3,\cdots$$

$\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{\ln x}=\dfrac{d}{dx}\{x(\ln x)^{-1}\}=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln^2 x}$ から

(1.4) $$\int_2^x\frac{dx}{\ln^2 x}=\mathrm{Li}(x)-\frac{x}{\ln x}$$

であるが，これをMarek Wolfは $\mathrm{Li}_2(x)$で定義した.

同様に，$\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{\ln^2 x}=\dfrac{d}{dx}\{x(\ln x)^{-2}\}=\dfrac{1}{\ln^2 x}-\dfrac{2}{\ln^3 x}$ であるから，

$$\int_2^x \frac{dx}{\ln^3 x} = \frac{1}{2}\left(\int_2^x \frac{dx}{\ln^2 x} - \frac{x}{\ln^2 x}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Li}_2(x) - \frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{\ln^3 x} = \frac{d}{dx}\{x(\ln x)^{-3}\} = \frac{1}{\ln^3 x} - \frac{3}{\ln^4 x} \quad \therefore \int_2^x \frac{dx}{\ln^4 x} = \frac{1}{3}\left(\int_2^x \frac{dx}{\ln^3 x} - \frac{x}{\ln^3 x}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\mathrm{Li}_2(x) - \frac{x}{\ln^2 x}\right) - \frac{x}{\ln^3 x}\right\}$$

$$= \frac{1}{3!}\left(\mathrm{Li}_2(x) - \frac{x}{\ln^2 x}\right) - \frac{1}{3}\frac{x}{\ln^3 x}$$

(1.5) $$\int_2^x \frac{dx}{\ln^4 x} = \frac{1}{3!}\mathrm{Li}_2(x) - \frac{1}{3!}\frac{x}{\ln^2 x} - \frac{1}{3}\frac{x}{\ln^3 x}.$$

以下，漸化式(1.6)を作ると，

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{\ln^n x} = \frac{d}{dx}\{x(\ln x)^{-n}\} = \frac{1}{\ln^n x} - \frac{n}{\ln^{n+1} x} \quad \therefore \int_2^x \frac{dx}{\ln^{n+1} x} = \frac{1}{n}\left(\int_2^x \frac{dx}{\ln^n x} - \frac{x}{\ln^n x}\right)$$

(1.6) $$\mathrm{Li}_{n+1}(x) = \frac{1}{n}\left(\mathrm{Li}_n(x) - \frac{x}{\ln^n x}\right) \ (n \geqq 2),\ \ n=1 \text{ のとき}, \ \mathrm{Li}_2(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln^2 x} = \mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\ln x}$$

n≧2のとき， $$\mathrm{Li}_{n+1}(x) = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n-1}\left(\mathrm{Li}_{n-1}(x) - \frac{x}{\ln^{n-1} x}\right) - \frac{x}{\ln^n x}\right\} = \frac{1}{n(n-1)}\left(\mathrm{Li}_{n-1}(x) - \frac{x}{\ln^{n-1} x}\right) - \frac{1}{n}\frac{x}{\ln^n x}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\mathrm{Li}_{n-1}(x) - \frac{1}{n(n-1)}\frac{x}{\ln^{n-1} x} - \frac{1}{n}\frac{x}{\ln^n x}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Li}_{n-2}(x) - \frac{x}{\ln^{n-2} x}\right) - \frac{1}{n(n-1)}\frac{x}{\ln^{n-1} x} - \frac{1}{n}\frac{x}{\ln^n x}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{n!}\mathrm{Li}_2(x) - \frac{1}{n}\frac{x}{\ln^n x} - \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k!\,x}{\ln^{k+1} x} = \frac{1}{n!}\mathrm{Li}_2(x) - \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!\,x}{\ln^{k+1} x}$$ ［次ページ計算を参考］

n→2n−1と置換して，

(1.7) $$\mathrm{Li}_{2n}(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln^{2n} x} = \frac{1}{(2n-1)!}\mathrm{Li}_2(x) - \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{k=1}^{2n-2}\frac{k!\,x}{\ln^{k+1} x}$$

$$\mathrm{Li}_2(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\ln x},\ \mathrm{Li}_4(x) = \frac{1}{3!}\mathrm{Li}_2(x) - \frac{1}{3!}\sum_{k=1}^{2}\frac{k!}{\ln^{k+1} x},\ \mathrm{Li}_6(x) = \frac{1}{5!}\mathrm{Li}_2(x) - \frac{1}{5!}\sum_{k=1}^{4}\frac{k!}{\ln^{k+1} x},\ \mathrm{Li}_8(x) = \frac{1}{7!}\mathrm{Li}_2(x) - \frac{1}{7!}\sum_{k=1}^{6}\frac{k!}{\ln^{k+1} x},\cdots$$

したがって，一般の正の整数sについて，(1.8)から，(1.9)，(1.10)のように計算できる.

(1.8) $$\int_2^x \frac{dx}{\ln^{2s} x} > \int_2^x \frac{dx}{\ln^s x \ln^s (x+2)} > \int_3^{x+1} \frac{dx}{\ln^{2s} x};\ s=1,2,3,\cdots$$

(1.9) $$\int_2^x \frac{dx}{\ln^2 x \ln^2 (x+2)} = \frac{1}{2}\{(\mathrm{Li}_4(x) + \mathrm{Li}_4(x+1)) - (\mathrm{Li}_4(2) + \mathrm{Li}_4(3))\}$$

(1.10) $$\int_2^x \frac{dx}{\ln^{2s} x \ln^{2s} (x+2)} = \frac{1}{2}\{(\mathrm{Li}_{2s}(x) + \mathrm{Li}_{2s}(x+1)) - (\mathrm{Li}_{2s}(2) + \mathrm{Li}_{2s}(3))\}$$

したがって，(1.8)の中央積分に対して，(1.11)のように双子素数の逆s乗べきを定義すれば，

(1.11) $$\pi_2^{*s}(x) := 2C_2\int_2^x \frac{du}{\ln^{2s}u\ln^{2s}(u+2)}$$

(1.7)式から,各 $\pi_2^{*s}(x)$ が(1.12)の形式で計算可能となる.

(1.12) $$\pi_2^{*s}(x) = C_2\{(\mathrm{Li}_{2s}(x)+\mathrm{Li}_{2s}(x+1))-(\mathrm{Li}_{2s}(2)+\mathrm{Li}_{2s}(3))\}$$

$\pi_2(x)$:双子素数の個数(番号)自体は，s≧2の場合になってもs=1の場合と同じままである.

よって，s=1の場合にはMarek Wolfの以下の形式の実験が有効であったが，s≧2の場合にはもう不要.

$$\pi_2(x)-C_2\{(\mathrm{Li}_{2a}(x)+\mathrm{Li}_{2b}(x+1))-(\mathrm{Li}_{2a}(2)+\mathrm{Li}_{2b}(3))\}$$

③ ＊ 5以上の奇素数Euler積 $P(s):=\prod_{p\geqq 5}\frac{1}{1-p^{-s}}$ を考える.

$-\log(1-t)=t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots$ $(-1\leqq t<1)$であるから，$t=p^{-s}$, $0<\frac{1}{p^s}\leqq\frac{1}{5}$.

$\log P(s)=-\sum_{p\geqq 5}\log(1-p^{-s})=\sum_{p\geqq 5}\left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{2p^{2s}}+\frac{1}{3p^{3s}}+\cdots\right)$ ：絶対収束 ⇒ 和を変更.

(2.1) $$P(s):=\prod_{p_{is}}\frac{1}{1-p_{is}^{-s}}\prod_{p,q:\mathrm{twin}}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\cdot\frac{1}{1-q^{-s}}\right)$$ p_{is}:孤立素数[注]

[注]ここで，孤立素数とはkを1以上の整数とするとき，(6k−1,6k+1)のペアのうち片方だけが素数となるものを指す．例：(23,25),(35,37),(47,49),⋯.
両方が素数となるペアは双子素数である.例：(5,7),(11,13),(17,19),⋯.
P(s)の定義では，5以上の素数としたので，2と3を含まないことに注意.
{素数}={2,3}∪{孤立素数}∪{双子素数}： {〇〇}は〇〇全体の集合
ここで，Euler積の対数展開では，孤立素数のペアと考えられる合成数が現れないので扱いが簡単になり，大助かりになることに注意されたい.
23,37,47，⋯に対し,25,35,49,⋯など.

$$\log P(s)=\sum_{p\geqq 5}\left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{2p^{2s}}+\frac{1}{3p^{3s}}+\cdots\right)=\sum_{p\geqq 5}\left(\frac{1}{p^s}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np^{ns}}\right)$$

$$=\left\{\sum_{p_{is}}\frac{1}{p_{is}}+\sum_{p,q:\mathrm{Twin}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right\}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{p_{is}}\frac{1}{p_{is}^{ns}}+\sum_{p,q:\mathrm{Twin}}\left(\frac{1}{p^{ns}}+\frac{1}{q^{ns}}\right)\right\}$$

(2.2) $$\log P(s)-\sum_{p_{is}}\frac{1}{p_{is}}=\sum_{p,q:\mathrm{Twin}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{p_{is}}\frac{1}{p_{is}^{ns}}+\sum_{p,q:\mathrm{Twin}}\left(\frac{1}{p^{ns}}+\frac{1}{q^{ns}}\right)\right\}$$

(2.2)の右辺は$s=1+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$に対して，収束するから，左辺も収束しなければならない.そして，右辺の計算手段は上述のように可能であり，

$P(s)=\int_5^x \frac{du}{\log u}$である.

(a)　　{孤立素数}={5以上の素数}－{(3,5)以外の双子素数}

(b)　　$$\log P(s)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{p_{is}}\frac{1}{p_{is}^{ns}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{p,q:\mathrm{Twin}}\left(\frac{1}{p^{ns}}+\frac{1}{q^{ns}}\right)$$

であるから，孤立素数の逆数和は次式で与えられる.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{p_{is}\leqq x}\frac{1}{p_{is}^{ns}}=\log\left(\int_5^x\frac{du}{\log u}\right)-2C_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_2^x\frac{du}{\log^{2n}u\log^{2n}(u+2)}+o(1)^{[注]}$$

2個の積分の上端xは任意の十分大きい数であるから，孤立素数は無限個存在することが導かれるが，どちらの上端も同じ値であるから，等号(恒等式)から双子素数も無限個存在する.

[注] 素数の積分の下端は通常の2を5に代えているが，双子素数予想式の積分の下端は2のままに据え置いたので，右辺に誤差項$o(1)$を追加した.

$2C_2=2\prod_{p\geqq 3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$の説明：

式$\pi_2(x)\sim 2C_2\int_2^x\frac{du}{\log u\log(u+2)}$ で積分式はあくまでも総体的なもので，

$\pi(x)\sim\int_2^x\frac{du}{\log u}$と対比すれば良く分かる. $\pi(x)$はすべての素数が対象であるが，

$\pi_2(x)$は偶数2は不要で，3以上の奇素数でも双子素数を構成しない素数が不要.

$1/\log u$，$1/\log(u+2)$はそれぞれ弟p,兄p+2の素数分布関数に対応するが，自動的に対応するわけではない. そこで，係数$2C_2$を掛けて不要な因子を除き補正する必要がある: (1) 2を掛ける理由:(弟p,兄p+2)は2の倍数ではない.どちらも2の倍数でない確率は$\frac{1}{2}$で，ともに独立事象であるから，乗法定理から，$\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$.

しかし，実際には共に2であってはいけないので，$1-\frac{1}{2}$. よって補正値$\frac{1-1/2}{(1-1/2)^2}=2$を掛ける必要がある. (2) $\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$を掛ける理由: pが奇素数の場合: (3,5)と，(5,7)の区別を無視し,あくまでも総体的に式を立てる.5を2度数えても1億や1兆ある総体の中では1組の違いしかないので，無視しても影響は小さい. 元々近似式なのだし.

仮に弟pに5が選ばれると，兄は自動的に7になるから，(5,7)以外の双子素数が決まるときには,もう共に5,7ではないから，その確率は$\left(1-\frac{1}{p}\right)^2$.

ところが実際には，ともに$p\neq 5$であって，しかも $p+2\neq 7$ なので，$p\neq 5$である事象の確率から$p+2\neq 7$である確率を引き，$\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}=1-\frac{2}{p}$.

よって,補正値 $\frac{1-2/p}{(1-1/p)^2}=\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$ を掛ける必要がある.これをすべての奇素数で繰り返して，$\prod_{p\geqq 3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$を掛ける.このpには23,37,47,…といった孤立素数は当然含まれないから，(23,25),(35,37),(47,49),…は除外される.

したがって，全体では(1)(2)から，Hardy−Littlewood定数$2C_2$=1.320323632…を掛ける必要がある.

【以下は計算だけ】

$$Li_3(x)=\frac{1}{2}\left(Li_2(x)-\frac{x}{\ln^2x}\right)=\frac{1}{2}Li_2(x)-\frac{1}{2}\frac{x}{\ln^2x}$$

$$Li_4(x)=\frac{1}{3}\left(Li_3(x)-\frac{x}{\ln^3x}\right)=\frac{1}{3}Li_3(x)-\frac{1}{3}\frac{x}{\ln^3x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}Li_2(x)-\frac{1}{2}\frac{x}{\ln^2x}\right)-\frac{1}{3}\frac{x}{\ln^3x}$$

$$=\frac{1}{3!}Li_2(x)-\frac{1}{3!}\frac{x}{\ln^2x}-\frac{1}{3}\frac{x}{\ln^3x}$$

$$Li_5(x)=\frac{1}{4}\left(Li_4(x)-\frac{x}{\ln^4x}\right)=\frac{1}{4}Li_4(x)-\frac{1}{4}\frac{x}{\ln^4x}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3!}Li_2(x)-\frac{1}{3!}\frac{x}{\ln^2x}-\frac{1}{3}\frac{x}{\ln^3x}\right)-\frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{\ln^4x}=\frac{1}{4!}Li_2(x)-\frac{1}{4!}\frac{x}{\ln^2x}-\frac{2!}{4!}\frac{x}{\ln^3x}-\frac{1}{4}\frac{x}{\ln^4x}$$

$$Li_6(x)=\frac{1}{5}\left(Li_5(x)-\frac{x}{\ln^5x}\right)=\frac{1}{5}Li_5(x)-\frac{1}{5}\frac{x}{\ln^5x}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4!}Li_2(x)-\frac{1}{4!}\frac{x}{\ln^2x}-\frac{2!}{4!}\frac{x}{\ln^3x}-\frac{1}{4}\frac{x}{\ln^4x}\right)-\frac{1}{5}\frac{x}{\ln^5x}$$

$$=\frac{1}{5!}Li_2(x)-\frac{1}{5!}\frac{x}{\ln^2x}-\frac{2!}{5!}\frac{x}{\ln^3x}-\frac{3!}{5!}\frac{x}{\ln^4x}-\frac{4!}{5!}\frac{x}{\ln^5x}$$

$$Li_7(x)=\frac{1}{6}\left(Li_6(x)-\frac{x}{\ln^6x}\right)=\frac{1}{6}Li_6(x)-\frac{1}{6}\frac{x}{\ln^6x}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5!}Li_2(x)-\frac{1}{5!}\frac{x}{\ln^2x}-\frac{2!}{5!}\frac{x}{\ln^3x}-\frac{3!}{5!}\frac{x}{\ln^4x}-\frac{4!}{5!}\frac{x}{\ln^5x}\right)-\frac{1}{6}\frac{x}{\ln^6x}$$

$$=\frac{1}{6!}Li_2(x)-\frac{1}{6!}\frac{x}{\ln^2x}-\frac{2!}{6!}\frac{x}{\ln^3x}-\frac{3!}{6!}\frac{x}{\ln^4x}-\frac{4!}{6!}\frac{x}{\ln^5x}-\frac{5!}{6!}\frac{x}{\ln^6x}$$

$$Li_8(x)=\frac{1}{7!}Li_2(x)-\frac{1}{7!}\frac{x}{\ln^2x}-\frac{2!}{7!}\frac{x}{\ln^3x}-\frac{3!}{7!}\frac{x}{\ln^4x}-\frac{4!}{7!}\frac{x}{\ln^5x}-\frac{5!}{7!}\frac{x}{\ln^6x}-\frac{6!}{7!}\frac{x}{\ln^7x}=\frac{1}{7!}Li_2(x)-\frac{1}{7!}\sum_{k=1}^{6}\frac{k!}{\ln^{k+1}x}$$

まとめると，$Li_{2n}(x)$に対する，最初の4個は以下の通り.

$$Li_2(x)=Li(x)-\frac{x}{\ln x},\ Li_4(x)=\frac{1}{3!}Li_2(x)-\frac{1}{3!}\sum_{k=1}^{2}\frac{k!}{\ln^{k+1}x},\ Li_6(x)=\frac{1}{5!}Li_2(x)-\frac{1}{5!}\sum_{k=1}^{4}\frac{k!}{\ln^{k+1}x},\ Li_8(x)=\frac{1}{7!}Li_2(x)-\frac{1}{7!}\sum_{k=1}^{6}\frac{k!}{\ln^{k+1}x}.$$

最後までお読みいただきありがとうございました.