乗数付き究極のオイラー完全数について

飯高 茂

平成 32 年 5 月 28 日

1　まえがき

ここでは新型完全数の一つとしてオイラー関数を用いた新型の完全数を導入しこれを詳しく調べる．解が偶数で $h \geq 3, m \geq -20$ なら A 型解になるという決定的結果が証明される．

2　乗数付のオイラー完全数

m は整数とする．$h > 2$ を素数とし，$q = h * 2^{e+1} + 1 + m$ は素数と仮定する．
$\alpha = 2^e q$ を乗数 h, 平行移動 m の狭義のオイラー完全数という．

$$4\varphi(\alpha) = 4\varphi(2^e q) = 2^{e+1}(q-1) = 2^{e+1}q - 2^{e+1} = 2\alpha - 2^{e+1}$$

そこで,h 倍してから $N = 2^{e+1} - 1, h * 2^{e+1} = q - (1+m)$ を用いると

$$4h\varphi(\alpha) = 2h * \alpha - 2^{e+1}h = 2h * \alpha + 1 + m - q$$

書き直して

$$4h\varphi(\alpha) = 2h * \alpha + 1 + m - q$$

一般に自然数 a の最大素因子を $\mathrm{Maxp}(a)$ と表すとき式

$$4h\varphi(\alpha) = 2h * \alpha + 1 + m - \mathrm{Maxp}(\alpha).$$

そこで

定義 1 $4h\varphi(\alpha) - 2h * \alpha + \mathrm{Maxp}(\alpha) = m + 1$ を満たす α をを乗数 h, 平行移動 m の *(広義の)* オイラー完全数という．

$A = \mathrm{Maxp}(\alpha) - m - 1$ とおく．

命題 1 これを満たす α について, $\alpha = 2^e Q(Q :$ 奇素数*)* を満たすなら $Q = h * 2^{e+1} + 1 + m = \mathrm{Maxp}(\alpha)$ となりこれは素数.
さらに $A = \mathrm{Maxp}(\alpha) - m - 1 = Q - m - 1 = h * 2^{e+1}$ となる.

Proof

$$\begin{aligned}
4h\varphi(\alpha) &= 2h*2^e(Q-1) = h*2^{e+1}*Q - h*2^{e+1} \\
&= 2h*\alpha+1+m-\mathrm{Maxp}(\alpha) \\
&= 2h*2^eQ+1+m-Q \\
&= h*2^{e+1}Q+1+m-Q
\end{aligned}$$

によって,

$$h*2^{e+1}*Q - h*2^{e+1} = h*2^{e+1}Q+1+m-Q$$

それゆえ

$$Q = h*2^{e+1}+1+m$$

q.e.d.

3　計算例

表 1: 乗数 $h = 3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -8$			
10	$2 * 5$	12	$2^2 * 3$
68	$2^2 * 17$	24	$2^3 * 3$
328	$2^3 * 41$	48	$2^4 * 3$
1424	$2^4 * 89$	96	$2^5 * 3$
97408	$2^7 * 761$	768	$2^8 * 3$
$m = -6$			
14	$2 * 7$	12	$2^2 * 3$
76	$2^2 * 19$	24	$2^3 * 3$
195	$3 * 5 * 13$	18	$2 * 3^2$
344	$2^3 * 43$	48	$2^4 * 3$
24256	$2^6 * 379$	384	$2^7 * 3$

表 2: 乗数 $h=3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-2$			
22	$2*11$	12	2^2*3
92	2^2*23	24	2^3*3
376	2^3*47	48	2^4*3
6112	2^5*191	192	2^6*3
24512	2^6*383	384	2^7*3
$m=0$			
26	$2*13$	12	2^2*3
1552	2^4*97	96	2^5*3
5187	$3*7*13*19$	18	$2*3^2$
6176	2^5*193	192	2^6*3
98432	2^7*769	768	2^8*3
$m=1$			
2	2	0	0
4	2^2	0	0
8	2^3	0	0
16	2^4	0	0
32	2^5	0	0
64	2^6	0	0
128	2^7	0	0
256	2^8	0	0
512	2^9	0	0

$q=h*2^{e+1}+1+m$ は素数と仮定する.
$m=1, h=3$ のとき定義式

$$4h\varphi(\alpha)-2h*\alpha+\mathrm{Maxp}(\alpha)=m+1$$

は

$$12\varphi(\alpha)-6*\alpha+\mathrm{Maxp}(\alpha)=2$$

$\alpha=2^e, e>0$ のとき,$\mathrm{Maxp}(\alpha)=2$ と $2\varphi(\alpha)-\alpha=0$ を満たすのでこれが解になる.
しかし, $\alpha=2^e, e>0$ のとき,$\mathrm{Maxp}(\alpha)=2$ ならば $\alpha=2^e$ となるだろうか.

表 3: 乗数 $h=3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=4$			
34	$2*17$	12	2^2*3
116	2^2*29	24	2^3*3
424	2^3*53	48	2^4*3
1616	2^4*101	96	2^5*3
6304	2^5*197	192	2^6*3
24896	2^6*389	384	2^7*3
98944	2^7*773	768	2^8*3
$m=6$			
38	$2*19$	12	2^2*3
124	2^2*31	24	2^3*3
1648	2^4*103	96	2^5*3
6368	2^5*199	192	2^6*3

表 4: 乗数 $h=3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=8$			
3	3	-6	$-2*3$
$m=10$			
46	$2*23$	12	2^2*3
472	2^3*59	48	2^4*3
1712	2^4*107	96	2^5*3

補題 1 a が素数ではない自然数なら, $\mathrm{co}\varphi(a) \geq \mathrm{Maxp}(a)$

解 α : 偶数で $m<-10$ なら解は A 型解

Proof

α : 偶数なので $\alpha = 2^\varepsilon L, (L:$ 奇数$)$ となる.

定義式 $4h\varphi(\alpha) - 2h*\alpha + \mathrm{Maxp}(\alpha) = m+1$ に代入すると,

$4h\varphi(\alpha) = 2h2^\varepsilon\varphi(L), 2h*\alpha = 2h2^\varepsilon L, \mathrm{Maxp}(\alpha) = \mathrm{Maxp}(L)$

により

$$1+m = 4h\varphi(\alpha) - 2h*\alpha + \mathrm{Maxp}(\alpha) = h*2^\varepsilon(-\mathrm{co}\varphi(L)) + \mathrm{Maxp}(L)$$

i. L が素数 p なら $1+m = -h*2^\varepsilon + p$. よって, $1+m+h*2^\varepsilon = p$.

ii. L が素数 p でないなら $\mathrm{Maxp}(L) = q$ とおく. 補題により $\mathrm{co}\varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(L) = q$. ゆえに

$$1+m = h*2^\varepsilon(-\mathrm{co}\varphi(L)) + \mathrm{Maxp}(L) \leq q + \quad h*2^\varepsilon*(-q) = q(1- \quad h*2^\varepsilon).$$

したがって, $m<-20$.

$m \geq -20$ なら i. の場合だけ.

q.e.d.

$m < -100$ になると, 偶数でも A 型にならない解が登場する.

表 5: 乗数 $h = 3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -192$			
130	$2 * 5 * 13$	204	$2^2 * 3 * 17$
$m = -190$			
96	$2^5 * 3$	192	$2^6 * 3$
$m = -188$			
160	$2^5 * 5$	192	$2^6 * 3$
578	$2 * 17^2$	204	$2^2 * 3 * 17$
$m = -186$			
224	$2^5 * 7$	192	$2^6 * 3$
$m = -182$			
352	$2^5 * 11$	192	$2^6 * 3$
4641	$3 * 7 * 13 * 17$	198	$2 * 3^2 * 11$
$m = -180$			
416	$2^5 * 13$	192	$2^6 * 3$
$m = -176$			
544	$2^5 * 17$	192	$2^6 * 3$
5313	$3 * 7 * 11 * 23$	198	$2 * 3^2 * 11$
$m = -174$			
608	$2^5 * 19$	192	$2^6 * 3$

表 6: 乗数 $h = 3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -170$			
110	$2 * 5 * 11$	180	$2^2 * 3^2 * 5$
736	$2^5 * 23$	192	$2^6 * 3$
$m = -168$			
78	$2 * 3 * 13$	180	$2^2 * 3^2 * 5$
$m = -164$			
60	$2^2 * 3 * 5$	168	$2^3 * 3 * 7$
928	$2^5 * 29$	192	$2^6 * 3$
$m = -162$			
196	$2^2 * 7^2$	168	$2^3 * 3 * 7$
992	$2^5 * 31$	192	$2^6 * 3$
$m = -156$			
315	$3^2 * 5 * 7$	162	$2 * 3^4$
1184	$2^5 * 37$	192	$2^6 * 3$

表 7: 乗数 $h=3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-152$			
1312	2^5*41	192	2^6*3
$m=-150$			
1376	2^5*43	192	2^6*3
1755	3^3*5*13	162	$2*3^4$
$m=-146$			
66	$2*3*11$	156	2^2*3*13
1504	2^5*47	192	2^6*3
$m=-144$			
338	$2*13^2$	156	2^2*3*13
$m=-142$			
72	2^3*3^2	144	2^4*3^2
$m=-140$			
825	$3*5^2*11$	150	$2*3*5^2$
1696	2^5*53	192	2^6*3
$m=-134$			
1888	2^5*59	192	2^6*3
$m=-132$			
1952	2^5*61	192	2^6*3

4 $h=5$ の場合

以下は付録

表 8: 乗数 $h = 5$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -8$			
26	$2 * 13$	20	$2^2 * 5$
584	$2^3 * 73$	80	$2^4 * 5$
10016	$2^5 * 313$	320	$2^6 * 5$
$m = -4$			
34	$2 * 17$	20	$2^2 * 5$
148	$2^2 * 37$	40	$2^3 * 5$
2512	$2^4 * 157$	160	$2^5 * 5$
10144	$2^5 * 317$	320	$2^6 * 5$
$m = -2$			
38	$2 * 19$	20	$2^2 * 5$
632	$2^3 * 79$	80	$2^4 * 5$

表 9: 乗数 $h = 5$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 0$			
164	$2^2 * 41$	40	$2^3 * 5$
$m = 1$			
2	2	0	0
4	2^2	0	0
8	2^3	0	0
16	2^4	0	0
32	2^5	0	0
64	2^6	0	0
128	2^7	0	0
256	2^8	0	0
512	2^9	0	0

表 10: 乗数 $h=5$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=2$			
46	$2*23$	20	2^2*5
172	2^2*43	40	2^3*5
664	2^3*83	80	2^4*5
2608	2^4*163	160	2^5*5
$m=6$			
188	2^2*47	40	2^3*5
2672	2^4*167	160	2^5*5
$m=8$			
58	$2*29$	20	2^2*5
712	2^3*89	80	2^4*5
$m=10$			
62	$2*31$	20	2^2*5
10592	2^5*331	320	2^6*5

5

表 11: 乗数 $h=3$, 平行移動 m の究極の Euler 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-18$			
28	2^2*7	24	2^3*3
248	2^3*31	48	2^4*3
1264	2^4*79	96	2^5*3
23488	2^6*367	384	2^7*3
$m=-14$			
44	2^2*11	24	2^3*3
1328	2^4*83	96	2^5*3
5728	2^5*179	192	2^6*3
$m=-12$			
52	2^2*13	24	2^3*3
296	2^3*37	48	2^4*3
5792	2^5*181	192	2^6*3
23872	2^6*373	384	2^7*3
$m=-10$			
6	$2*3$	12	2^2*3
$m=-8$			
10	$2*5$	12	2^2*3
68	2^2*17	24	2^3*3
328	2^3*41	48	2^4*3
1424	2^4*89	96	2^5*3

6 乗数 $h=3$

表 12: 乗数 $h=3$, 平行移動 m の究極の Euler 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-6$			
14	$2*7$	12	2^2*3
76	2^2*19	24	2^3*3
195	$3*5*13$	18	$2*3^2$
344	2^3*43	48	2^4*3
24256	2^6*379	384	2^7*3
$m=-2$			
22	$2*11$	12	2^2*3
92	2^2*23	24	2^3*3
376	2^3*47	48	2^4*3
6112	2^5*191	192	2^6*3
24512	2^6*383	384	2^7*3

7 乗数 $h=3$

表 13: 乗数 $h=3$, 平行移動 m の究極の Euler 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=0$			
26	$2*13$	12	2^2*3
1552	2^4*97	96	2^5*3
5187	$3*7*13*19$	18	$2*3^2$
6176	2^5*193	192	2^6*3
$m=1$			
2	2	0	0
4	2^2	0	0
8	2^3	0	0
16	2^4	0	0
32	2^5	0	0
64	2^6	0	0
128	2^7	0	0
256	2^8	0	0
512	2^9	0	0
$m=4$			
34	$2*17$	12	2^2*3
116	2^2*29	24	2^3*3
424	2^3*53	48	2^4*3
1616	2^4*101	96	2^5*3
6304	2^5*197	192	2^6*3
24896	2^6*389	384	2^7*3
$m=6$			
38	$2*19$	12	2^2*3
124	2^2*31	24	2^3*3
1648	2^4*103	96	2^5*3
6368	2^5*199	192	2^6*3
$m=8$			
3	3	-6	$-2*3$
$m=10$			
15	$3*5$	-6	$-2*3$
46	$2*23$	12	2^2*3
472	2^3*59	48	2^4*3
1712	2^4*107	96	2^5*3

8 乗数 $h=1$

表 14: 乗数 $h=1$, 平行移動 m の究極の Euler 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-18$			
1504	2^5*47	64	2^6
30592	2^7*239	256	2^8
975	$3*5^2*13$	30	$2*3*5$
$m=-16$			
50	$2*5^2$	20	2^2*5
272	2^4*17	32	2^5
7232	2^6*113	128	2^7
30848	2^7*241	256	2^8
$m=-14$			
24	2^3*3	16	2^4
304	2^4*19	32	2^5
$m=-12$			
40	2^3*5	16	2^4
1696	2^5*53	64	2^6
105	$3*5*7$	18	$2*3^2$
42585	$3*5*17*167$	178	$2*89$

9 乗数 $h=1$

表 15: 乗数 $h=1$, 平行移動 m の究極の Euler 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-10$			
18	$2*3^2$	12	2^2*3
56	2^3*7	16	2^4
368	2^4*23	32	2^5
$m=-6$			
12	2^2*3	8	2^3
88	2^3*11	16	2^4
1888	2^5*59	64	2^6
32128	2^7*251	256	2^8
585	3^2*5*13	18	$2*3^2$
$m=-4$			
20	2^2*5	8	2^3
104	2^3*13	16	2^4
464	2^4*29	32	2^5
1952	2^5*61	64	2^6

10 余関数

$\mathrm{co}\varphi(a)=p^e$

表 16: 乗数 $h=1$, 平行移動 m の究極の Euler 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-2$			
6	$2*3$	4	2^2
28	2^2*7	8	2^3
496	2^4*31	32	2^5
8128	2^6*127	128	2^7
$m=0$			
10	$2*5$	4	2^2
136	2^3*17	16	2^4
32896	2^7*257	256	2^8
165	$3*5*11$	10	$2*5$
15561	$3^2*7*13*19$	18	$2*3^2$
16215	$3*5*23*47$	46	$2*23$
$m=1$			
2	2	0	0
4	2^2	0	0
8	2^3	0	0
16	2^4	0	0
32	2^5	0	0
64	2^6	0	0
128	2^7	0	0
256	2^8	0	0
512	2^9	0	0

表 17: 乗数 $h = 1$, 平行移動 m の究極の Euler 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 2$			
14	$2 * 7$	4	2^2
44	$2^2 * 11$	8	2^3
152	$2^3 * 19$	16	2^4
2144	$2^5 * 67$	64	2^6
8384	$2^6 * 131$	128	2^7
$m = 4$			
3	3	-2	-2
52	$2^2 * 13$	8	2^3
592	$2^4 * 37$	32	2^5
23655	$3 * 5 * 19 * 83$	78	$2 * 3 * 13$

表 18: 乗数 $h = 1$, 平行移動 m の究極の Euler 完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 6$			
15	$3 * 5$	-2	-2
22	$2 * 11$	4	2^2
184	$2^3 * 23$	16	2^4
2272	$2^5 * 71$	64	2^6
33664	$2^7 * 263$	256	2^8
195	$3 * 5 * 13$	6	$2 * 3$
44115	$3 * 5 * 17 * 173$	166	$2 * 83$
$m = 8$			
9	3^2	-6	$-2 * 3$
26	$2 * 13$	4	2^2
68	$2^2 * 17$	8	2^3
656	$2^4 * 41$	32	2^5
2336	$2^5 * 73$	64	2^6
8768	$2^6 * 137$	128	2^7
$m = 10$			
5	5	-6	$-2 * 3$
45	$3^2 * 5$	-6	$-2 * 3$
76	$2^2 * 19$	8	2^3
688	$2^4 * 43$	32	2^5
8896	$2^6 * 139$	128	2^7

表 19: $\mathrm{co}\varphi(a) = 3^e$

a	素因数分解
e= 2	
21	$3 * 7$
27	3^3
e= 3	
63	$3^2 * 7$
81	3^4
115	$5 * 23$
187	$11 * 17$
e= 4	
189	$3^3 * 7$
237	$3 * 79$
243	3^5
781	$11 * 71$
1357	$23 * 59$
1537	$29 * 53$

表 20: $\mathrm{co}\varphi(a) = 3^e$

a	素因数分解
e= 5	
567	$3^4 * 7$
711	$3^2 * 79$
723	$3 * 241$
729	3^6
1195	$5 * 239$
2563	$11 * 233$
3859	$17 * 227$
9259	$47 * 197$
10123	$53 * 191$
12283	$71 * 173$
14659	$107 * 137$
14803	$113 * 131$

表 21: co$\varphi(a) = 3^e$

a	素因数分解
e= 6	
1545	$3 * 5 * 103$
1701	$3^5 * 7$
1833	$3 * 13 * 47$
2133	$3^3 * 79$
2169	$3^2 * 241$
2181	$3 * 727$
2187	3^7
7909	$11 * 719$
20329	$29 * 701$
32101	$47 * 683$
35881	$53 * 677$

11　不十分

$\mathrm{co}\varphi(a) = p^e$
$a = \alpha p^f, (p \not| \alpha$: 素数) について
$\varphi(a) = \varphi(\alpha)\varphi(p^f) = \varphi(\alpha)p^f - \varphi(\alpha)p^{f-1})$
$\mathrm{co}\varphi(a) = \mathrm{co}\varphi(\alpha))p^f + (\alpha - 1)p^{f-1} = p^f + (\alpha - 1)p^{f-1} = p^e$
したがって
$p^f + (\alpha - 1)p^{f-1} = p^e$.
よって $p + \alpha - 1 = p^{e+1-f}$.
$\alpha = p^{e+1-f} - p + 1$.
i. $f = e - 1$. $\alpha = p^2 - p + 1$. $p = 3$ なら $\alpha = 7$
ii. $f = e - 2$. $\alpha = p^3 - p + 1$. $p = 3$ なら $\alpha = 25$ noprime!
iii. $f = e - 3$. $\alpha = p^4 - p + 1$. $p = 3$ なら $\alpha = 79$
続きに期待