

# 究極のオイラー完全数

飯高 茂

平成 32 年 5 月 30 日

## 1 まえがき

ここでは新型完全数の一つとしてオイラー関数を用いた新型の完全数を導入しこれを詳しく調べる. 解が偶数で  $h \geq 3, m \geq -20$  なら A 型解になるという決定的結果が証明される.

## 2 乗数付のオイラー完全数

$m$  は整数とする.  $h > 2$  を素数とし,  $q = h * 2^{e+1} + 1 + m$  は素数と仮定する.  
 $\alpha = 2^e q$  を乗数  $h$ , 平行移動  $m$  の狭義のオイラー完全数という.

$$4\varphi(\alpha) = 4\varphi(2^e q) = 2^{e+1}(q-1) = 2^{e+1}q - 2^{e+1} = 2\alpha - 2^{e+1}$$

そこで,  $h$  倍してから  $N = 2^{e+1} - 1, h * 2^{e+1} = q - (1 + m)$  を用いると

$$4h\varphi(\alpha) = 2h * \alpha - 2^{e+1}h = 2h * \alpha + 1 + m - q$$

書き直して

$$4h\varphi(\alpha) = 2h * \alpha + 1 + m - q$$

一般に自然数  $a$  の最大素因子を  $\text{Maxp}(a)$  と表すとき式

$$4h\varphi(\alpha) = 2h * \alpha + 1 + m - \text{Maxp}(\alpha).$$

そこで

**定義 1**  $4h\varphi(\alpha) - 2h * \alpha + \text{Maxp}(\alpha) = m + 1$  を満たす  $\alpha$  を乗数  $h$ , 平行移動  $m$  の (広義の) オイラー完全数という.

$A = \text{Maxp}(\alpha) - m - 1$  とおく.

**命題 1** これを満たす  $\alpha$  について,  $\alpha = 2^e Q (Q: \text{奇素数})$  を満たすなら  $Q = h * 2^{e+1} + 1 + m = \text{Maxp}(\alpha)$  となりこれは素数.

さらに  $A = \text{Maxp}(\alpha) - m - 1 = Q - m - 1 = h * 2^{e+1}$  となる.

**Proof**

$$\begin{aligned}4h\varphi(\alpha) &= 2h * 2^e(Q - 1) = h * 2^{e+1} * Q - h * 2^{e+1} \\ &= 2h * \alpha + 1 + m - \text{Maxp}(\alpha) \\ &= 2h * 2^e Q + 1 + m - Q \\ &= h * 2^{e+1} Q + 1 + m - Q\end{aligned}$$

によって,

$$h * 2^{e+1} * Q - h * 2^{e+1} = h * 2^{e+1} Q + 1 + m - Q$$

それゆえ

$$Q = h * 2^{e+1} + 1 + m$$

**q.e.d.**

### 3 計算例

表 1: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -8$			
10	$2 * 5$	12	$2^2 * 3$
68	$2^2 * 17$	24	$2^3 * 3$
328	$2^3 * 41$	48	$2^4 * 3$
1424	$2^4 * 89$	96	$2^5 * 3$
97408	$2^7 * 761$	768	$2^8 * 3$
$m = -6$			
14	$2 * 7$	12	$2^2 * 3$
76	$2^2 * 19$	24	$2^3 * 3$
195	$3 * 5 * 13$	18	$2 * 3^2$
344	$2^3 * 43$	48	$2^4 * 3$
24256	$2^6 * 379$	384	$2^7 * 3$

表 2: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -2$			
22	$2 * 11$	12	$2^2 * 3$
92	$2^2 * 23$	24	$2^3 * 3$
376	$2^3 * 47$	48	$2^4 * 3$
6112	$2^5 * 191$	192	$2^6 * 3$
24512	$2^6 * 383$	384	$2^7 * 3$
$m = 0$			
26	$2 * 13$	12	$2^2 * 3$
1552	$2^4 * 97$	96	$2^5 * 3$
5187	$3 * 7 * 13 * 19$	18	$2 * 3^2$
6176	$2^5 * 193$	192	$2^6 * 3$
98432	$2^7 * 769$	768	$2^8 * 3$
$m = 1$			
2	2	0	0
4	$2^2$	0	0
8	$2^3$	0	0
16	$2^4$	0	0
32	$2^5$	0	0
64	$2^6$	0	0
128	$2^7$	0	0
256	$2^8$	0	0
512	$2^9$	0	0

$q = h * 2^{e+1} + 1 + m$  は素数と仮定する.  
 $m = 1, h = 3$  のとき定義式

$$4h\varphi(\alpha) - 2h * \alpha + \text{Maxp}(\alpha) = m + 1$$

は

$$12\varphi(\alpha) - 6 * \alpha + \text{Maxp}(\alpha) = 2$$

$\alpha = 2^e, e > 0$  のとき,  $\text{Maxp}(\alpha) = 2$  と  $2\varphi(\alpha) - \alpha = 0$  を満たすのでこれが解になる.  
 しかし,  $\alpha = 2^e, e > 0$  のとき,  $\text{Maxp}(\alpha) = 2$  ならば  $\alpha = 2^e$  となるだろうか.

表 3: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = 4$			
34	$2 * 17$	12	$2^2 * 3$
116	$2^2 * 29$	24	$2^3 * 3$
424	$2^3 * 53$	48	$2^4 * 3$
1616	$2^4 * 101$	96	$2^5 * 3$
6304	$2^5 * 197$	192	$2^6 * 3$
24896	$2^6 * 389$	384	$2^7 * 3$
98944	$2^7 * 773$	768	$2^8 * 3$
$m = 6$			
38	$2 * 19$	12	$2^2 * 3$
124	$2^2 * 31$	24	$2^3 * 3$
1648	$2^4 * 103$	96	$2^5 * 3$
6368	$2^5 * 199$	192	$2^6 * 3$

表 4: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = 8$			
3	3	-6	$-2 * 3$
$m = 10$			
46	$2 * 23$	12	$2^2 * 3$
472	$2^3 * 59$	48	$2^4 * 3$
1712	$2^4 * 107$	96	$2^5 * 3$

補題 1  $a$  が素数ではない自然数なら,  $\text{co}\varphi(a) \geq \text{Maxp}(a)$

解  $\alpha$ : 偶数で  $m < -10$  なら解は A 型解

**Proof**

$\alpha$ : 偶数なので  $\alpha = 2^\varepsilon L$ , ( $L$ : 奇数) となる.

定義式  $4h\varphi(\alpha) - 2h * \alpha + \text{Maxp}(\alpha) = m + 1$  に代入すると,

$4h\varphi(\alpha) = 2h2^\varepsilon\varphi(L)$ ,  $2h * \alpha = 2h2^\varepsilon L$ ,  $\text{Maxp}(\alpha) = \text{Maxp}(L)$

により

$$1 + m = 4h\varphi(\alpha) - 2h * \alpha + \text{Maxp}(\alpha) = h * 2^\varepsilon(-\text{co}\varphi(L)) + \text{Maxp}(L)$$

i.  $L$  が素数  $p$  なら  $1 + m = -h * 2^\varepsilon + p$ . よって,  $1 + m + h * 2^\varepsilon = p$ .

ii.  $L$  が素数  $p$  でないなら  $\text{Maxp}(L) = q$  とおく. 補題により  $\text{co}\varphi(L) \geq \text{Maxp}(L) = q$ .  
ゆえに

$$1 + m = h * 2^\varepsilon(-\text{co}\varphi(L)) + \text{Maxp}(L) \leq q + h * 2^\varepsilon * (-q) = q(1 - h * 2^\varepsilon).$$

したがって,  $m < -20$ .

$m \geq -20$  なら i. の場合だけ.

**q.e.d.**

$m < -100$  になると, 偶数でも A 型にならない解が登場する.

表 5: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	A	素因数分解
$m = -192$			
130	$2 * 5 * 13$	204	$2^2 * 3 * 17$
$m = -190$			
96	$2^5 * 3$	192	$2^6 * 3$
$m = -188$			
160	$2^5 * 5$	192	$2^6 * 3$
578	$2 * 17^2$	204	$2^2 * 3 * 17$
$m = -186$			
224	$2^5 * 7$	192	$2^6 * 3$
$m = -182$			
352	$2^5 * 11$	192	$2^6 * 3$
4641	$3 * 7 * 13 * 17$	198	$2 * 3^2 * 11$
$m = -180$			
416	$2^5 * 13$	192	$2^6 * 3$
$m = -176$			
544	$2^5 * 17$	192	$2^6 * 3$
5313	$3 * 7 * 11 * 23$	198	$2 * 3^2 * 11$
$m = -174$			
608	$2^5 * 19$	192	$2^6 * 3$

表 6: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -170$			
110	$2 * 5 * 11$	180	$2^2 * 3^2 * 5$
736	$2^5 * 23$	192	$2^6 * 3$
$m = -168$			
78	$2 * 3 * 13$	180	$2^2 * 3^2 * 5$
$m = -164$			
60	$2^2 * 3 * 5$	168	$2^3 * 3 * 7$
928	$2^5 * 29$	192	$2^6 * 3$
$m = -162$			
196	$2^2 * 7^2$	168	$2^3 * 3 * 7$
992	$2^5 * 31$	192	$2^6 * 3$
$m = -156$			
315	$3^2 * 5 * 7$	162	$2 * 3^4$
1184	$2^5 * 37$	192	$2^6 * 3$



表 7: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -152$			
1312	$2^5 * 41$	192	$2^6 * 3$
$m = -150$			
1376	$2^5 * 43$	192	$2^6 * 3$
1755	$3^3 * 5 * 13$	162	$2 * 3^4$
$m = -146$			
66	$2 * 3 * 11$	156	$2^2 * 3 * 13$
1504	$2^5 * 47$	192	$2^6 * 3$
$m = -144$			
338	$2 * 13^2$	156	$2^2 * 3 * 13$
$m = -142$			
72	$2^3 * 3^2$	144	$2^4 * 3^2$
$m = -140$			
825	$3 * 5^2 * 11$	150	$2 * 3 * 5^2$
1696	$2^5 * 53$	192	$2^6 * 3$
$m = -134$			
1888	$2^5 * 59$	192	$2^6 * 3$
$m = -132$			
1952	$2^5 * 61$	192	$2^6 * 3$

#### 4 $h = 5$ の場合

以下は付録

表 8: 乗数  $h = 5$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -8$			
26	$2 * 13$	20	$2^2 * 5$
584	$2^3 * 73$	80	$2^4 * 5$
10016	$2^5 * 313$	320	$2^6 * 5$
$m = -4$			
34	$2 * 17$	20	$2^2 * 5$
148	$2^2 * 37$	40	$2^3 * 5$
2512	$2^4 * 157$	160	$2^5 * 5$
10144	$2^5 * 317$	320	$2^6 * 5$
$m = -2$			
38	$2 * 19$	20	$2^2 * 5$
632	$2^3 * 79$	80	$2^4 * 5$

表 9: 乗数  $h = 5$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = 0$			
164	$2^2 * 41$	40	$2^3 * 5$
$m = 1$			
2	2	0	0
4	$2^2$	0	0
8	$2^3$	0	0
16	$2^4$	0	0
32	$2^5$	0	0
64	$2^6$	0	0
128	$2^7$	0	0
256	$2^8$	0	0
512	$2^9$	0	0

表 10: 乗数  $h = 5$ , 平行移動  $m$  の最新式超完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = 2$			
46	$2 * 23$	20	$2^2 * 5$
172	$2^2 * 43$	40	$2^3 * 5$
664	$2^3 * 83$	80	$2^4 * 5$
2608	$2^4 * 163$	160	$2^5 * 5$
$m = 6$			
188	$2^2 * 47$	40	$2^3 * 5$
2672	$2^4 * 167$	160	$2^5 * 5$
$m = 8$			
58	$2 * 29$	20	$2^2 * 5$
712	$2^3 * 89$	80	$2^4 * 5$
$m = 10$			
62	$2 * 31$	20	$2^2 * 5$
10592	$2^5 * 331$	320	$2^6 * 5$

表 11: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の究極の Euler 完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -18$			
28	$2^2 * 7$	24	$2^3 * 3$
248	$2^3 * 31$	48	$2^4 * 3$
1264	$2^4 * 79$	96	$2^5 * 3$
23488	$2^6 * 367$	384	$2^7 * 3$
$m = -14$			
44	$2^2 * 11$	24	$2^3 * 3$
1328	$2^4 * 83$	96	$2^5 * 3$
5728	$2^5 * 179$	192	$2^6 * 3$
$m = -12$			
52	$2^2 * 13$	24	$2^3 * 3$
296	$2^3 * 37$	48	$2^4 * 3$
5792	$2^5 * 181$	192	$2^6 * 3$
23872	$2^6 * 373$	384	$2^7 * 3$
$m = -10$			
6	$2 * 3$	12	$2^2 * 3$
$m = -8$			
10	$2 * 5$	12	$2^2 * 3$
68	$2^2 * 17$	24	$2^3 * 3$
328	$2^3 * 41$	48	$2^4 * 3$
1424	$2^4 * 89$	96	$2^5 * 3$

## 6 乗数 $h = 3$

表 12: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の究極の Euler 完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -6$			
14	$2 * 7$	12	$2^2 * 3$
76	$2^2 * 19$	24	$2^3 * 3$
195	$3 * 5 * 13$	18	$2 * 3^2$
344	$2^3 * 43$	48	$2^4 * 3$
24256	$2^6 * 379$	384	$2^7 * 3$
$m = -2$			
22	$2 * 11$	12	$2^2 * 3$
92	$2^2 * 23$	24	$2^3 * 3$
376	$2^3 * 47$	48	$2^4 * 3$
6112	$2^5 * 191$	192	$2^6 * 3$
24512	$2^6 * 383$	384	$2^7 * 3$

## 7 乗数 $h = 3$

表 13: 乗数  $h = 3$ , 平行移動  $m$  の究極の Euler 完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = 0$			
26	$2 * 13$	12	$2^2 * 3$
1552	$2^4 * 97$	96	$2^5 * 3$
5187	$3 * 7 * 13 * 19$	18	$2 * 3^2$
6176	$2^5 * 193$	192	$2^6 * 3$
$m = 1$			
2	2	0	0
4	$2^2$	0	0
8	$2^3$	0	0
16	$2^4$	0	0
32	$2^5$	0	0
64	$2^6$	0	0
128	$2^7$	0	0
256	$2^8$	0	0
512	$2^9$	0	0
$m = 4$			
34	$2 * 17$	12	$2^2 * 3$
116	$2^2 * 29$	24	$2^3 * 3$
424	$2^3 * 53$	48	$2^4 * 3$
1616	$2^4 * 101$	96	$2^5 * 3$
6304	$2^5 * 197$	192	$2^6 * 3$
24896	$2^6 * 389$	384	$2^7 * 3$
$m = 6$			
38	$2 * 19$	12	$2^2 * 3$
124	$2^2 * 31$	24	$2^3 * 3$
1648	$2^4 * 103$	96	$2^5 * 3$
6368	$2^5 * 199$	192	$2^6 * 3$
$m = 8$			
3	3	-6	$-2 * 3$
$m = 10$			
15	$3 * 5$	-6	$-2 * 3$
46	$2 * 23$	12	$2^2 * 3$
472	$2^3 * 59$	48	$2^4 * 3$
1712	$2^4 * 107$	96	$2^5 * 3$

## 8 乗数 $h = 1$

表 14: 乗数  $h = 1$ , 平行移動  $m$  の究極の Euler 完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -18$			
1504	$2^5 * 47$	64	$2^6$
30592	$2^7 * 239$	256	$2^8$
975	$3 * 5^2 * 13$	30	$2 * 3 * 5$
$m = -16$			
50	$2 * 5^2$	20	$2^2 * 5$
272	$2^4 * 17$	32	$2^5$
7232	$2^6 * 113$	128	$2^7$
30848	$2^7 * 241$	256	$2^8$
$m = -14$			
24	$2^3 * 3$	16	$2^4$
304	$2^4 * 19$	32	$2^5$
$m = -12$			
40	$2^3 * 5$	16	$2^4$
1696	$2^5 * 53$	64	$2^6$
105	$3 * 5 * 7$	18	$2 * 3^2$
42585	$3 * 5 * 17 * 167$	178	$2 * 89$

## 9 乗数 $h = 1$

表 15: 乗数  $h = 1$ , 平行移動  $m$  の究極の Euler 完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -10$			
18	$2 * 3^2$	12	$2^2 * 3$
56	$2^3 * 7$	16	$2^4$
368	$2^4 * 23$	32	$2^5$
$m = -6$			
12	$2^2 * 3$	8	$2^3$
88	$2^3 * 11$	16	$2^4$
1888	$2^5 * 59$	64	$2^6$
32128	$2^7 * 251$	256	$2^8$
585	$3^2 * 5 * 13$	18	$2 * 3^2$
$m = -4$			
20	$2^2 * 5$	8	$2^3$
104	$2^3 * 13$	16	$2^4$
464	$2^4 * 29$	32	$2^5$
1952	$2^5 * 61$	64	$2^6$



表 16: 乗数  $h = 1$ , 平行移動  $m$  の究極の Euler 完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = -2$			
6	$2 * 3$	4	$2^2$
28	$2^2 * 7$	8	$2^3$
496	$2^4 * 31$	32	$2^5$
8128	$2^6 * 127$	128	$2^7$
$m = 0$			
10	$2 * 5$	4	$2^2$
136	$2^3 * 17$	16	$2^4$
32896	$2^7 * 257$	256	$2^8$
165	$3 * 5 * 11$	10	$2 * 5$
15561	$3^2 * 7 * 13 * 19$	18	$2 * 3^2$
16215	$3 * 5 * 23 * 47$	46	$2 * 23$
$m = 1$			
2	2	0	0
4	$2^2$	0	0
8	$2^3$	0	0
16	$2^4$	0	0
32	$2^5$	0	0
64	$2^6$	0	0
128	$2^7$	0	0
256	$2^8$	0	0
512	$2^9$	0	0

表 17: 乗数  $h = 1$ , 平行移動  $m$  の究極の Euler 完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = 2$			
14	$2 * 7$	4	$2^2$
44	$2^2 * 11$	8	$2^3$
152	$2^3 * 19$	16	$2^4$
2144	$2^5 * 67$	64	$2^6$
8384	$2^6 * 131$	128	$2^7$
$m = 4$			
3	3	-2	-2
52	$2^2 * 13$	8	$2^3$
592	$2^4 * 37$	32	$2^5$
23655	$3 * 5 * 19 * 83$	78	$2 * 3 * 13$

表 18: 乗数  $h = 1$ , 平行移動  $m$  の究極の Euler 完全数

$a$	素因数分解	$A$	素因数分解
$m = 6$			
15	$3 * 5$	-2	-2
22	$2 * 11$	4	$2^2$
184	$2^3 * 23$	16	$2^4$
2272	$2^5 * 71$	64	$2^6$
33664	$2^7 * 263$	256	$2^8$
195	$3 * 5 * 13$	6	$2 * 3$
44115	$3 * 5 * 17 * 173$	166	$2 * 83$
$m = 8$			
9	$3^2$	-6	$-2 * 3$
26	$2 * 13$	4	$2^2$
68	$2^2 * 17$	8	$2^3$
656	$2^4 * 41$	32	$2^5$
2336	$2^5 * 73$	64	$2^6$
8768	$2^6 * 137$	128	$2^7$
$m = 10$			
5	5	-6	$-2 * 3$
45	$3^2 * 5$	-6	$-2 * 3$
76	$2^2 * 19$	8	$2^3$
688	$2^4 * 43$	32	$2^5$
8896	$2^6 * 139$	128	$2^7$