書泉講義 2018/July
ウルトラ完全数 ニュータイプ

飯高 茂

2018 年 7 月 26 日

1 ウルトラ完全数

2 m だけ平行移動したスーパー完全数

$a = 2^e, (q = 2a - 1 + m:$ 素数) のとき, a を m だけ平行移動した狭義のスーパー完全数という.

$a = 2^e$ に対して,$N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $\sigma(a) = N = 2a - 1 = q - m$ なので $q = \sigma(a) + m$.

$\sigma(q) = q + 1$ によって $\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$, $q + 1 = 2a + m$.

$$\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

かくしてできた式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ を a を未知数と見立てて, 平行移動 m のスーパー完全数の方程式と言い, この解を平行移動 m のスーパー完全数と呼ぶ.

$A = \sigma(a) + m$ とおいて, A を加えて, $\sigma(A) = 2a + m$ と組んで連立方程式と見ることもできる.

表 1: $m = -8$: Super 完全数

a	factor	A	$q = 2a - 1 - m$	factor
8	2^3	7	7	7
16	2^4	23	23	23
221	$13 * 17$	244	433	433
256	2^8	503	503	503
1024	2^{10}	2039	2039	2039
m= -6				
a	factor	A	$q = 2a - 1 - m$	factor
17	17	12	27	3^3
m= -5				
4	2^2	2	2	2
m= -4				
a	factor	A	$q = 2a - 1 - m$	factor
4	2^2	3	3	3
8	2^3	11	11	11
23	23	20	41	41
32	2^5	59	59	59
107	107	104	209	$11 * 19$
128	2^7	251	251	251
242	$2 * 11^2$	395	479	479
467	467	464	929	929
512	2^9	1019	1019	1019
653	653	650	1301	1301
2048	2^{11}	4091	4091	4091
3077	$17 * 181$	3272	6149	$11 * 13 * 43$
6728	$2^3 * 29^2$	13061	13451	13451
9953	$37 * 269$	10256	19901	$7 * 2843$

表 2: $m = -2$: Super 完全数

a	factor	A	$q = 2a - 1 - m$	factor
4	2^2	5	5	5
7	7	6	11	11
8	2^3	13	13	13
16	2^4	29	29	29
29	29	28	55	$5 * 11$
32	2^5	61	61	61
253	$11 * 23$	286	503	503
256	2^8	509	509	509
512	2^9	1021	1021	1021
889	$7 * 127$	1022	1775	$5^2 * 71$
2048	2^{11}	4093	4093	4093
8192	2^{13}	16381	16381	16381

表 3: $m=-1$:Super 完全数

a	factor	A	$q=2a-1-m$	factor
m= -1				
2	2	2	2	2
m= 0				
a	factor	A	$q=2a-1-m$	factor
2	2	3	3	3
4	2^2	7	7	7
16	2^4	31	31	31
64	2^6	127	127	127
4096	2^{12}	8191	8191	8191
m= 1				
a	factor	A	$q=2a-1-m$	factor
15	$3*5$	25	30	$2*3*5$
190	$2*5*19$	361	380	2^2*5*19
m= 2				
a	factor	A	$q=2a-1-m$	factor
2	2	5	5	5
8	2^3	17	17	17
11	11	14	23	23
41	41	44	83	83
65	$5*13$	86	131	131
107	107	110	215	$5*43$
128	2^7	257	257	257
149	149	152	299	$13*23$
881	881	884	1763	$41*43$
959	$7*137$	1106	1919	$19*101$
2141	2141	2144	4283	4283

表 4: $m = 3, 4$: Super 完全数

a	factor	A	$q = 2a - 1 - m$	factor
m= 3				
a	factor	A	$q = 2a - 1 - m$	factor
5	5	9	12	$2^2 * 3$
m= 4				
a	factor	A	$q = 2a - 1 - m$	factor
2	2	7	7	7
4	2^2	11	11	11
8	2^3	19	19	19
32	2^5	67	67	67
47	47	52	97	97
64	2^6	131	131	131
341	$11 * 31$	388	685	$5 * 137$
587	587	592	1177	$11 * 107$
2048	2^{11}	4099	4099	4099

表 5: $m=6$: Super 完全数

a	factor	A	$q=2a-1-m$	factor
4	2^2	13	13	13
16	2^4	37	37	37
49	7^2	63	103	103
1024	2^{10}	2053	2053	2053
m= 8				
a	factor	A	$q=2a-1-m$	factor
2	2	11	11	11
8	2^3	23	23	23
17	17	26	41	41
32	2^5	71	71	71
59	59	68	125	5^3
128	2^7	263	263	263
512	2^9	1031	1031	1031
647	647	656	1301	1301
m= 10				
a	factor	A	$q=2a-1-m$	factor
2	2	13	13	13
4	2^2	17	17	17
16	2^4	41	41	41
32	2^5	73	73	73
64	2^6	137	137	137
85	$5*17$	118	179	179
256	2^8	521	521	521
427	$7*61$	506	863	863
512	2^9	1033	1033	1033
677	677	688	1363	$29*47$

3　m だけ平行移動したウルトラ完全数

$\sigma(2a)=4a-1, \sigma(\sigma(a)+m)-m=2a$ なので

$$\sigma(\sigma(\sigma(a)+m)-m)=4a-1$$

を得る．これを a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という．

定義 1 $\sigma(\sigma(\sigma(a)+m)-m)=4a-1$　となる式を, a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という．

この式は複雑なので変数を増やして連立方程式に直す.

$$\sigma(\sigma(\sigma(a)+m)-m)=4a-1.$$

$A=\sigma(a)+m$, $B=\sigma(A)-m$, $\sigma(B)=4a-1$

この形の解 a を平行移動 m のウルトラ完全数という．$m=0$ なら $\sigma^3(a)=4a-1$ になりこれが高橋のウルトラ完全数の定義式である．

4　ウルトラ完全数 II 型

$a=2^e, (q=2a-1+m:$ 素数$)$ のとき, $N=2^{e+1}-1$ とおくと, $\sigma(a)=N=2a-1=q-m$ なので $q=\sigma(a)+m$.

$A=\sigma(a)+m$ とおく．$A=q$:素数, を心得ておく．

$\sigma(A)=q+1=A+1$ なので, $B=\sigma(A)-1$ とおく．$B=q$:素数, を心得ておく．

$\sigma(B)=q+1=2a+m$.

そこで, $a=2^e, (q=2a-1+m:$ 素数$)$ の仮定の下で得られた

$A=\sigma(a)+m$, $B=\sigma(A)-1$, $\sigma(B)=2a+m$.

を取り上げ，$a=2^e$ の仮定をすっかり忘れ, この連立式を満たす a を平行移動 m のウルトラ完全数 II 型という．

連立式を平行移動 m のウルトラ完全数 II 型の定義式その解を平行移動 m のウルトラ完全数 II 型とよぶ.

区別のために前の式をウルトラ完全数 I 型という．また高橋のウルトラ完全数とも言う．ウルトラ完全数 II 型をニュータイプのウルトラ完全数ともいう．

このようにして得られたウルトラ完全数 II 型はまったくのご都合主義で得られたもののようであるが研究を積み重ねるとわかるように, 不思議なほど有用で研究しやすい式である．

実際ウルトラ完全数 II 型において $m=-28,-18,-14,-58$ のときの解からウルトラ三子素数が出てくる．

m= -8

表 6: $m = -8, -7, -5$: Ultra 完全数 II 型

a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
8	2^3	7	7	7	7
16	2^4	23	23	23	23
221	$13 * 17$	433	433	244	433
256	2^8	503	503	503	503
1024	2^{10}	2039	2039	2039	2039
m= -7					
a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
4	2^2	0	0	0	0
m= -5					
a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
3	3	0	0	-1	0
4	2^2	2	2	2	2

表 7: $m = -4, -3$: Ultra 完全数 II 型

a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
4	2^2	3	3	3	3
8	2^3	11	11	11	11
23	23	41	41	20	41
32	2^5	59	59	59	59
128	2^7	251	251	251	251
242	$2 * 11^2$	479	479	395	479
467	467	929	929	464	929
512	2^9	1019	1019	1019	1019
653	653	1301	1301	650	1301
2048	2^{11}	4091	4091	4091	4091
6728	$2^3 * 29^2$	13451	13451	13061	13451
m= -3					
a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
2	2	0	0	0	0

表 8: $m=-2$: Ultra 完全数 II 型

a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
4	2^2	5	5	5	5
7	7	11	11	6	11
8	2^3	13	13	13	13
16	2^4	29	29	29	29
32	2^5	61	61	61	61
253	$11*23$	503	503	286	503
256	2^8	509	509	509	509
512	2^9	1021	1021	1021	1021
589	$19*31$	1175	5^2*47	638	1079
949	$13*73$	1895	$5*379$	1034	1727
2048	2^{11}	4093	4093	4093	4093
7345	$5*13*113$	14687	$19*773$	9574	14363
8192	2^{13}	16381	16381	16381	16381

表 9: $m = -1, 0$: Ultra 完全数 II 型

a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
2	2	2	2	2	2
m= 0					
a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
2	2	3	3	3	3
4	2^2	7	7	7	7
16	2^4	31	31	31	31
64	2^6	127	127	127	127
4096	2^{12}	8191	8191	8191	8191

表 10: $m=2$: Ultra 完全数 II 型

a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
2	2	5	5	5	5
8	2^3	17	17	17	17
11	11	23	23	14	23
41	41	83	83	44	83
59	59	119	$7*17$	62	95
65	$5*13$	131	131	86	131
128	2^7	257	257	257	257
587	587	1175	5^2*47	590	1079
1379	$7*197$	2759	$31*89$	1586	2603
2141	2141	4283	4283	2144	4283

表 11: $m = 4, 6$: Ultra 完全数 II 型

a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
m= 4					
2	2	7	7	7	7
4	2^2	11	11	11	11
8	2^3	19	19	19	19
32	2^5	67	67	67	67
47	47	97	97	52	97
64	2^6	131	131	131	131
2048	2^{11}	4099	4099	4099	4099
m= 6					
a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
4	2^2	13	13	13	13
16	2^4	37	37	37	37
49	7^2	103	103	63	103
1024	2^{10}	2053	2053	2053	2053

表 12: $m = 8, 10$: Ultra 完全数 II 型

a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
2	2	11	11	11	11
8	2^3	23	23	23	23
17	17	41	41	26	41
32	2^5	71	71	71	71
128	2^7	263	263	263	263
512	2^9	1031	1031	1031	1031
647	647	1301	1301	656	1301
m= 10					
a	$factor$	q-Mer	$factor$	A	B
2	2	13	13	13	13
4	2^2	17	17	17	17
16	2^4	41	41	41	41
32	2^5	73	73	73	73
64	2^6	137	137	137	137
85	$5 * 17$	179	179	118	179
187	$11 * 17$	383	383	226	341
256	2^8	521	521	521	521
259	$7 * 37$	527	$17 * 31$	314	473
427	$7 * 61$	863	863	506	863
512	2^9	1033	1033	1033	1033
835	$5 * 167$	1679	$23 * 73$	1018	1529
5083	$13 * 17 * 23$	10175	$5^2 * 11 * 37$	6058	9827
8203	$13 * 631$	16415	$5 * 7^2 * 67$	8858	13727

5 ウルトラ完全数 II 型の基本定理

次の結果はウルトラ完全数 II 型でのオイラーの定理の類似.

定理 1 $m = 0$ のときウルトラ完全数 *II* 型 である a は偶数を仮定すると, $a = 2^e$, かつ $q = 2a - 1$ は素数になり $\alpha = aq$ は完全数になる.

Proof.
条件から, $A = \sigma(a)$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a$ を満たす.
a は偶数なので奇数 L により $a = 2^e L, e > 0$, と書ける.
$N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき, $A = \sigma(a) = \sigma(2^e)\sigma(L) = N\sigma(L)$. とくに $A = N\sigma(L)$.
これより, $N, \sigma(L)$ は A の約数である.
$L > 1$ を仮定する. すると, $\sigma(L) \geq L + 1$.
$A, \sigma(L)$ は A の約数なので

$$\sigma(A) \geq 1 + \sigma(L) + A.$$

条件式 $\sigma(B) = 2a = 2 * 2^e L = (N + 1)L$, かつ $\sigma(B) \geq B + 1 = \sigma(A)$.
よって,

$$\sigma(B) = (N + 1)L \geq B + 1 = \sigma(A) \geq 1 + \sigma(L) + A \geq 2 + L + N(L + 1).$$

これより

$$(N + 1)L \geq 2 + L + N(L + 1).$$

これは矛盾. よって, $L = 1, a = 2^e$. ここで次の補題を用意する.

補題 1 ウルトラ完全数 *II* 型の解 a が *2* べき, すなわち $a = 2^e$ なら, $q = 2a - 1 + m$ は素数

Proof.
仮定より $A = \sigma(a) + m = 2a - 1 + m$. 定義から $\sigma(B) = 2a + m = A + 1$.
$\sigma(B) = 2a + m \geq B + 1 = \sigma(A) \geq A + 1 = 2a + m$.
よって 2 つの等号が成り立ち, $\sigma(B) = B + 1, \sigma(A) = A + 1$. よって, B は素数. A も素数. $A = 2a - 1 + m = q$ なので, $q = 2a - 1 + m$ は素数.
End
この補題により, $q = 2a - 1 = 2^{e+1} - 1$ は素数 (メルセンヌ素数), になり $\alpha = aq$ は完全数になる.

表 13: $m=-18$ Super 完全数

a	$factor$	A	q-mer	$factor$
15	$3*5$	6	11	11
16	2^4	13	13	13
21	$3*7$	14	23	23
27	3^3	22	35	$5*7$
39	$3*13$	38	59	59
57	$3*19$	62	95	$5*19$
64	2^6	109	109	109
111	$3*37$	134	203	$7*29$
129	$3*43$	158	239	239
201	$3*67$	254	383	383
219	$3*73$	278	419	419
237	$3*79$	302	455	$5*7*13$
309	$3*103$	398	599	599
327	$3*109$	422	635	$5*127$
417	$3*139$	542	815	$5*163$
471	$3*157$	614	923	$13*71$
579	$3*193$	758	1139	$17*67$
669	$3*223$	878	1319	1319
831	$3*277$	1094	1643	$31*53$
921	$3*307$	1214	1823	1823
939	$3*313$	1238	1859	$11*13^2$
1024	2^{10}	2029	2029	2029
1047	$3*349$	1382	2075	5^2*83
1101	$3*367$	1454	2183	$37*59$
1119	$3*373$	1478	2219	$7*317$
1137	$3*379$	1502	2255	$5*11*41$
1191	$3*397$	1574	2363	$17*139$
1227	$3*409$	1622	2435	$5*487$
1299	$3*433$	1718	2579	2579
1371	$3*457$	1814	2723	$7*389$
1389	$3*463$	1838	2759	$31*89$
1461	$3*487$	1934	2903	2903
1497	$3*499$	1982	2975	5^2*7*17
1569	$3*523$	2078	3119	3119

定理 2 $m=-18$ のとき, $p, q=2p-7, r=6p-19$ がすべて素数なら $a=3p$ はニュータイプのウルトラ完全数になる.

表 14: $m=-18$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a	$factor$	$p=a/3$	$q=2p-7$	$r=6p-19$	$r+1$	$2a+m$
15	$3*5$	5	3	11	12	15
16	2^4	5.333333333	3.666666667	13	14	16
21	$3*7$	7	7	23	24	21
29	29	9.666666667	12.33333333	39	40	29
39	$3*13$	13	19	59	60	39
64	2^6	21.33333333	35.66666667	109	110	64
129	$3*43$	43	79	239	240	129
201	$3*67$	67	127	383	384	201
219	$3*73$	73	139	419	420	219
309	$3*103$	103	199	599	600	309
669	$3*223$	223	439	1319	1320	669
729	3^6	243	479	1439	1440	729
921	$3*307$	307	607	1823	1824	921
1024	2^{10}	341.3333333	675.6666667	2029	2030	1024
1299	$3*433$	433	859	2579	2580	1299
1461	$3*487$	487	967	2903	2904	1461
1569	$3*523$	523	1039	3119	3120	1569
2361	$3*787$	787	1567	4703	4704	2361
2559	$3*853$	853	1699	5099	5100	2559
2649	$3*883$	883	1759	5279	5280	2649
3369	$3*1123$	1123	2239	6719	6720	3369
4341	$3*1447$	1447	2887	8663	8664	4341
4629	$3*1543$	1543	3079	9239	9240	4629
4971	$3*1657$	1657	3307	9923	9924	4971
5259	$3*1753$	1753	3499	10499	10500	5259
5961	$3*1987$	1987	3967	11903	11904	5961
6249	$3*2083$	2083	4159	12479	12480	6249
6339	$3*2113$	2113	4219	12659	12660	6339
7851	$3*2617$	2617	5227	15683	15684	7851

Proof

$m=-18, a=3p$ を代入すると,

$A=\sigma(a)+m=4p+4-18=4p-14=2q, q=2p-7$. q: 素数と仮定すると,

$r=B=\sigma(A)-1=3q+2=3(2p-7)+2=6p-19$. r: 素数と仮定すると,

$\sigma(B)=6p-18=2a+m$

End

さらにこの逆が成り立つ.

命題 1 p : 素数, $a=3p$, $A=\sigma(a)+m=2q, q=2p-7$. として $B=\sigma(A)-1, \sigma(B)=6p-18=2a+m$ を仮定すると, q, r はともに素数.

Proof.

$$\sigma(B)=6p-18 \geq B+1=\sigma(A) \geq A+1.$$

$A=\sigma(a)+m=2q$ により, $\sigma(A)=\sigma(2q)=3\sigma(q) \geq 3q+3=3(2p-6)$.
$\sigma(B)=6p-18$ により, $\sigma(B)=6p-18 \geq B+1=\sigma(A) \geq 3(2p-6)$.
$\sigma(B)=3(2p-6)$ によりすべて等号が成り立ち, 結果として. q, r はともに素数.

End

ウルトラ三つ子素数とニュータイプのウルトラ完全数の関係がこのように成立した.
この結果は大きな勝利とも言える. 発見の端緒は 2018 年 7 月 2 日新宿の大学病院の地下の放射線治療室の前のベンチで得られその後都立多摩図書館で一応のまとまった結果が得られた.
このように研究を活発に行った動機は, スーパー双子素数, ウルトラ三つ子素数の高橋予想を補強することにあった.
より一般に示す.
$m=-18$ のとき, 解 $a=3\rho$ (3,ρ: 互いに素) を持つとする.
$A=\sigma(a)+m=4p+4-18=4\sigma(\rho)-18=2R$ ただし $R=2\sigma(\rho)-9$.
すると, R は奇数なので $\sigma(A)=3\sigma(R)$.
$B=\sigma(A)-1=3\sigma(R)-1$.

$$\sigma(B)=2a+m=6\rho-18 \geq B+1=\sigma(A)=3\sigma(R).$$

$$\sigma(B)=3\sigma(R) \geq B+1 \geq \sigma(A)=3\sigma(R).$$

等号成立で

$$\sigma(B)=B+1, \sigma(R)=R+1, \sigma(\rho)=\rho+1.$$

$\rho=p$:素数,$q=R=2\sigma(p)-9=2p-7, r=B=3\sigma(R)-1=6p-19$.
$p, q=2p-7, r=6p-19$ はウルトラ三つ子素数

End

$p, q=2p-7, r=6p-19$ がすべて素数なら $a=3p$ はニュータイプのウルトラ完全数になる.
Proof

表 15: $m = -28$ Super 完全数

a	$factor$	A	q-mer	$factor$
16	2^4	3	3	3
26	$2*13$	14	23	23
35	$5*7$	20	41	41
77	$7*11$	68	125	5^3
98	$2*7^2$	143	167	167
107	107	80	185	$5*37$
119	$7*17$	116	209	$11*19$
128	2^7	227	227	227
161	$7*23$	164	293	293
203	$7*29$	212	377	$13*29$
329	$7*47$	356	629	$17*37$
371	$7*53$	404	713	$23*31$
413	$7*59$	452	797	797
497	$7*71$	548	965	$5*193$
623	$7*89$	692	1217	1217
707	$7*101$	788	1385	$5*277$
917	$7*131$	1028	1805	$5*19^2$
959	$7*137$	1076	1889	1889
1043	$7*149$	1172	2057	11^2*17
1253	$7*179$	1412	2477	2477
1379	$7*197$	1556	2729	2729
1589	$7*227$	1796	3149	$47*67$
1631	$7*233$	1844	3233	$53*61$
1799	$7*257$	2036	3569	$43*83$
1841	$7*263$	2084	3653	$13*281$
1967	$7*281$	2228	3905	$5*11*71$
2177	$7*311$	2468	4325	5^2*173

6 $m=-28$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

はじめにパソコンで数表を出す.

表 16: $m=-28$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a		$p=a/7$	$q=2p-5$	$r=14p-29$	$r+1$	$(r+1-m)/2$
16	2^4					
26	$2*13$			0	1	14.5
35	$5*7$	5	5	41	42	35
98	$2*7^2$	14	23	167	168	98
128	2^7	18.28571429	31.57142857	227	228	128
161	$7*23$	23	41	293	294	161
413	$7*59$	59	113	797	798	413
623	$7*89$	89	173	1217	1218	623
959	$7*137$	137	269	1889	1890	959
1253	$7*179$	179	353	2477	2478	1253
1379	$7*197$	197	389	2729	2730	1379
2681	$7*383$	383	761	5333	5334	2681
2723	$7*389$	389	773	5417	5418	2723
3101	$7*443$	443	881	6173	6174	3101
4151	$7*593$	593	1181	8273	8274	4151
4319	$7*617$	617	1229	8609	8610	4319
4529	$7*647$	647	1289	9029	9030	4529
4781	$7*683$	683	1361	9533	9534	4781
5033	$7*719$	719	1433	10037	10038	5033
5999	$7*857$	857	1709	11969	11970	5999
6491	6491	927.2857143	1849.571429	12953	12954	6491
6629	$7*947$	947	1889	13229	13230	6629
6671	$7*953$	953	1901	13313	13314	6671
6839	$7*977$	977	1949	13649	13650	6839
7763	$7*1109$	1109	2213	15497	15498	7763
8351	$7*1193$	1193	2381	16673	16674	8351
8561	$7*1223$	1223	2441	17093	17094	8561
9149	$7*1307$	1307	2609	18269	18270	9149
10409	$7*1487$	1487	2969	20789	20790	10409
11249	$7*1607$	1607	3209	22469	22470	11249
14189	$7*2027$	2027	4049	28349	28350	14189
14273	$7*2039$	2039	4073	28517	28518	14273
15449	$7*2207$	2207	4409	30869	30870	15449

ウルトラ完全数 ニュータイプの定義式に $m=-28$ を代入し

$A=\sigma(a)-28,\ B=\sigma(A)-1,\ \sigma(B)=2a-28.$

数表を見ると $a=7p,(p\neq 7$: 素数), の解が多いことに気づく.

$a=7p$ とおくとき, $A=\sigma(a)-28=8p+8-28=8p-20=4q,(q=2p-5)$

そこで q は素数と仮定すると,$4,q$ は互いに素なので, $\sigma(A)=\sigma(4q)=7(q+1)$. $B=\sigma(A)-1=7q+6$. $r=7q+6$ とおきこれも素数と仮定する.

$\sigma(B)=r+1=7q+7=7(2p-5+1)=14p-28=2a+m.$

ゆえに, 次の結果を証明できた.

定理 3 *$p,q=2p-5,r=7q+6$ がどれも素数なら, $a=7p$ は $m=-28$ ウルトラ完全数ニュータイプの解になる.*

このとき $(p,q=2p-5,r=7q+6)$ をウルトラ三つ子素数という. このとき $7p$ はウルトラ完全数 ニュータイプ になる.

ここにおいて $r=7q+6=7(2p-5)+6=14p-29.$

6.1 逆定理

$a=7C,((7,C)$: 互いに素), と仮定する. これはウルトラ完全数 ニュータイプ になると仮定する.

$A=\sigma(a)-28,\ B=\sigma(A)-1\ \sigma(B)=14C-28$ を満たすとする.

$A=\sigma(7C)-28=8\sigma(C)-28=4(2\sigma(C)-7)$ になり $R=2\sigma(C)-7$ とおくとき $A=4R$.

$\sigma(B)=14C-28\geq B+1=\sigma(A)$. $A=4R$ により, R : 奇数なので,

$$\sigma(A)=\sigma(4R)=7\sigma(R)\geq 7R+7.$$

$\sigma(B)=14C-28\geq\sigma(A)\geq 7R+7$ になるので

$14C-28\geq 7R+7$ を 7 で割って,

$$2C-4\geq R+1.$$

$R=2\sigma(C)-7$ によると, $R+1=2\sigma(C)-6$ となり

$$2C-4\geq 2\sigma(C)-6.$$

$C\geq\sigma(C)-1$ なので一般には $C\leq\sigma(C)-1$ が成り立ち, $C=\sigma(C)-1$. よって, C は素数 p. ここですべての不等号が等号になり, $R=2\sigma(C)-7=2C-5=2p-5$ は素数 q.

$\sigma(B)=B+1,\sigma(B)=14C-28$ により, $B+1=14C-28=14p-28$. $B=r$ と書けば $r=14p-29$. かくして, $p,q=2p-5,14p-28$ はウルトラ三つ子素数.

表 17: $m = -14$ Super 完全数

a	$factor$	A	q-mer	$factor$
16	2^4	17	17	17
37	37	24	59	59
43	43	30	71	71
64	2^6	113	113	113
67	67	54	119	$7 * 17$
79	79	66	143	$11 * 13$
127	127	114	239	239
128	2^7	241	241	241
151	151	138	287	$7 * 41$
199	199	186	383	383
247	$13 * 19$	266	479	479
271	271	258	527	$17 * 31$
317	317	304	619	619
331	331	318	647	647
367	367	354	719	719
379	379	366	743	743
439	439	426	863	863
487	487	474	959	$7 * 137$
512	2^9	1009	1009	1009
547	547	534	1079	$13 * 83$
619	619	606	1223	1223
631	631	618	1247	$29 * 43$
691	691	678	1367	1367
907	907	894	1799	$7 * 257$

$m = -14$

表 18: $m = -14$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a		p	$A = p - 13$	$q = A/6$	$B = r = 12q + 11$	$r + 1$	$r + 1 - 2a$
16	2^4	16	3	0.5	17	18	-14
37	37	37	24	4	59	60	-14
43	43	43	30	5	71	72	-14
64	2^6	64	51	8.5	113	114	-14
127	127	127	114	19	239	240	-14
128	2^7	128	115	19.16666667	241	242	-14
133	$7 * 19$	133	120	20	251	252	-14
199	199	199	186	31	383	384	-14
247	$13 * 19$	247	234	39	479	480	-14
317	317	317	304	50.66666667	619	620	-14
331	331	331	318	53	647	648	-14
343	7^3	343	330	55	671	672	-14
367	367	367	354	59	719	720	-14
379	379	379	366	61	743	744	-14
439	439	439	426	71	863	864	-14
512	2^9	512	499	83.16666667	1009	1010	-14
619	619	619	606	101	1223	1224	-14
691	691	691	678	113	1367	1368	-14
919	919	919	906	151	1823	1824	-14
1027	$13 * 79$	1027	1014	169	2039	2040	-14
1051	1051	1051	1038	173	2087	2088	-14

表 19: $m=-14$ ウルトラ完全数 ニュータイプ,cont

a		p	$A=p-13$	$q=A/6$	$B=r=12q+11$	$r+1$	$r+1-2a$
1279	1279	1279	1266	211	2543	2544	-14
1447	1447	1447	1434	239	2879	2880	-14
1459	1459	1459	1446	241	2903	2904	-14
2347	2347	2347	2334	389	4679	4680	-14
2467	2467	2467	2454	409	4919	4920	-14
2647	2647	2647	2634	439	5279	5280	-14
2707	2707	2707	2694	449	5399	5400	-14
3571	3571	3571	3558	593	7127	7128	-14
3967	3967	3967	3954	659	7919	7920	-14
4051	4051	4051	4038	673	8087	8088	-14
4219	4219	4219	4206	701	8423	8424	-14
4867	$31*157$	4867	4854	809	9719	9720	-14
4951	4951	4951	4938	823	9887	9888	-14
5587	$37*151$	5587	5574	929	11159	11160	-14
6067	6067	6067	6054	1009	12119	12120	-14
6247	6247	6247	6234	1039	12479	12480	-14
6379	6379	6379	6366	1061	12743	12744	-14
6571	6571	6571	6558	1093	13127	13128	-14
6991	6991	6991	6978	1163	13967	13968	-14
7219	7219	7219	7206	1201	14423	14424	-14
7687	7687	7687	7674	1279	15359	15360	-14
8192	2^{13}	8192	8179	1363.166667	16369	16370	-14
9151	9151	9151	9138	1523	18287	18288	-14
9739	9739	9739	9726	1621	19463	19464	-14
10459	10459	10459	10446	1741	20903	20904	-14
10711	10711	10711	10698	1783	21407	21408	-14

7 $m=-2-2\mu$, μ : 完全数

$a=p(p:$ 素数$)$, と仮定する．これがウルトラ完全数 ニュータイプ になるのはどんなときか.

$A=\sigma(a)-2-2\mu$, $B=\sigma(A)-1$ を満たすとする.

$A=p+1-2-2\mu$ は素数 Q の μ 倍とする．すなわち, $A=p+1-2-2\mu=\mu Q$.

Q , μ は互いに素とする.

$\sigma(\mu)=2\mu$ によって, $\sigma(A)=\sigma(\mu Q)=2\mu\sigma(Q)=2\mu(Q+1)$.

$B=\sigma(A)-1=2\mu(Q+1)-1$ は素数と仮定する.
計算してみると

$$\sigma(B)=B+1=2\mu(Q+1)=2p-2-2\mu.$$

$2p-2-2\mu=2a+m$ なので,$\sigma(B)=2a+m$. これにより.

$a=p(p:$ 素数$)$ のとき, $A=p+1-2-2\mu=\mu Q$ $(Q:$ 素数$)$, $B=2\mu(Q+1)-1$ は素数とすると, $a=p$ は ウルトラ完全数 ニュータイプ になる.

7.1 逆定理

$a=p$ 素数と仮定する. これはウルトラ完全数 ニュータイプ になると仮定する. すなわち

$A=\sigma(a)-2-2\mu$, $B=\sigma(A)-1$ $\sigma(B)=2a-2-2\mu$ を満たすとする.

$\sigma(B)=2p-2-2\mu$ は仮定されていて,

参考文献

[1] 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版社,1971.

[2] C.F.Gauss(カール・フリードリヒ ガウス), ガウス 整数論 (数学史叢書)(高瀬正仁訳), 共立出版社, 1995.

[3] 飯高茂 , (雑誌の連載) 数学の研究をはじめよう , 現代数学社 ,2013 〜 .

[4] 飯高茂 , 『数学の研究をはじめよう (I),(II)』, 現代数学社 ,2016.

[5] 飯高茂 , 『 数学の研究をはじめよう (III),(IV)』, 現代数学社 ,2017.

[6] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[7] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

[8] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1