オイラー関数の反復に対応する自然な余関数について

梶田 光

2023 年 10 月 7 日

1　$\mathrm{co}\varphi^2$ の定義とその値

オイラー関数 $\varphi(n)$ には, $\mathrm{co}\varphi(n) = n - \varphi(n)$ で定義される余関数がある.
これを $\varphi^2(n) := \varphi(\varphi(n))$ に対してまったく同じように $\mathrm{co}\varphi^2 = n - \varphi^2(n)$ と定義すると, いくつかのよい性質が満たされない.
例えば $\mathrm{co}\varphi^2$ の下限が 1 より大きい, 特定の条件を満たす n に対して $\mathrm{co}\varphi^2$ が一定にならない ($\mathrm{co}\varphi$ では n : prime のとき 1 であった) などである.
しかし, $\mathrm{co}\varphi^2(n) = n - 2\varphi^2(n)$ と定義することによりこの問題が解決される.
今回はこのようにしてできた $\mathrm{co}\varphi^2(n)$ が定数 C に等しくなる場合, どのような n が生成されるかを調べる.

C	n
-1	1
0	2
1	$3, 5, 17, 257, 65537$
2	2^2
3	$7, 11, 23, 47, 59, 83, 107, 167, 179, 227, 263, 347, 359, \ldots$
4	$2 \cdot 3, 2^3$
5	$3^2, 13, 29, 53, 149, 173, 269, 293, 317, 389, 509, 557, \ldots$
6	$2 \cdot 5$
7	$3 \cdot 5, 19$
8	$2^2 \cdot 3, 2^4$
9	$5^2, 41, 89, 137, 233, 569, 809, 857, 1049, 1097, 1193, \ldots$

表 1: $\mathrm{co}\varphi^2(n) = C$

定理 1. $n > 2$ のとき $\mathrm{co}\varphi^2(n) \geq 1$.

Proof. $\varphi(n) = n \displaystyle\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ より, $\varphi^2(n) = \varphi(\varphi(n)) = \varphi(n) \displaystyle\prod_{p|\varphi(n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
$n > 2$ のとき $\varphi(n)$: even であるから, $p = 2$ は $p|\varphi(n)$ を満たす.
したがって $\varphi^2(n) \leq \dfrac{1}{2}\varphi(n)$.

つまり $\mathrm{co}\varphi^2(n) = n - 2\varphi^2(n) \geq n - 2 \cdot \frac{1}{2}\varphi(n) = \mathrm{co}\varphi(n)$.
$n > 1$ のとき $\mathrm{co}\varphi(n) \geq 1$ であるから, $\mathrm{co}\varphi^2(n) \geq \mathrm{co}\varphi(n) \geq 1$. □

ここで $\mathrm{co}\varphi^2(1) = -1$ かつ $\mathrm{co}\varphi^2(2) = 0$ なので, まとめると一般に $\mathrm{co}\varphi^2(n) \geq -1$ が成り立つということになる.
また, $\mathrm{co}\varphi^2(n) = -1$ と $n = 1$, $\mathrm{co}\varphi^2(n) = 0$ と $n = 2$ はそれぞれ同値であることが従う.

補題 1. n が合成数ならば, $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$.

Proof. n の最小素因数を q とすると, $q \leq \sqrt{n}$. したがって,
$\varphi(n) \leq n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n - \sqrt{n}$. □

定理 2. $\mathrm{co}\varphi^2(n) = C$ に無限個の解があるならば, $C = 1, 2^e + 1$.
またそれぞれの C について, 方程式 $\mathrm{co}\varphi^2(n) = C$ の

- $C = 1$ のとき, n はフェルマ素数
- $C = 2^e + 1$, n は $\frac{n-1}{2^e}$ も素数となるような素数. ただし n がフェルマ素数の場合を除く.

という解以外は高々有限個のみ.

Proof. まず, $n = 1, 2$ の場合は除外してよい.
このとき $\varphi(n) : \mathrm{even}$ であるから,
$2\varphi^2(n) = 2\varphi(n) \prod_{p|\varphi(n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \varphi(n) \prod_{p|\varphi(n), p \neq 2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ と表される.
n が合成数のとき, $2\varphi^2(n) \leq n - \sqrt{n}$.
よって $\mathrm{co}\varphi^2(n) = n - 2\varphi^2(n) \geq n - (n - \sqrt{n}) = \sqrt{n}$ が得られる.
つまり $C \geq \sqrt{n}$, よって $n \leq C^2$.
したがって C が固定されている場合, $\mathrm{co}\varphi^2(n) = C$ に合成数の解は無限に存在できない.
$\mathrm{co}\varphi^2(n) = C$ に無限個の解があるということは, したがって無限個の素数解があることと同値である.
$n : \mathrm{prime}$ として再度 $\mathrm{co}\varphi$ を計算すると
$\mathrm{co}\varphi^2(n) = n - 2\varphi^2(n) = n - \varphi(n) \prod_{p|\varphi(n), p \neq 2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n - (n-1) \prod_{p|n-1, p \neq 2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = C$.
ここで $n - 1 = 2^e L (e > 0, L : \mathrm{odd})$ とおき, L は合成数と仮定する.
すると $C = n - (n-1) \prod_{p|n-1, p \neq 2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n - 2^e \varphi(L)$.
$\varphi(L) \leq L - \sqrt{L}$ より $C \geq n - 2^e(L - \sqrt{L}) = n - (n-1) + 2^e\sqrt{L} = 1 + 2^e\sqrt{L} \geq 1 + \sqrt{2^e L} = 1 + \sqrt{n-1}$.
$\sqrt{n-1} \leq C - 1$ より $n \leq (C-1)^2 + 1$, よって L が合成数の解は無限に存在できない.
したがって $L = 1$ または $L : \mathrm{prime}$.
(1) $L = 1$ の場合
このとき $n - 1 = 2^e$ より $n = 2^e + 1 : \mathrm{prime}$ となり n はフェルマ素数.
また, $C = n - 2^e\varphi(L) = n - 2^e = 2^e + 1 - 2^e = 1$.
(2) $L : \mathrm{prime}$ の場合
$L = q$ とおける.
すると $n - 1 = 2^e q$ より $q = \frac{n-1}{2^e}$ が奇素数となる.

($L=q:\mathrm{odd}$ の条件が n がフェルマ素数の場合を除外している.)
このとき $C=n-2^e(q-1)=2^eq+1-2^e(q-1)=2^e+1$ が成り立つ. $\square$

以下, 一般化された安全素数を $\dfrac{n-1}{2^e}$ が素数となるような素数 n と定義する. すると上の証明からいくつかの系が得られる.

- 合成数 n が $\mathrm{co}\varphi^2(n)=C$ を満たすとき, $n\le C^2$
- 一般化された安全素数ではない素数 n が $\mathrm{co}\varphi^2(n)=C$ を満たすとき, $n\le C^2-2C+2$

したがって, 上の定理に示された C,n の組み合わせ以外で $\mathrm{co}\varphi^2(n)=C$ の解を求めるときは, 高々 $n\le C^2$ までを計算すれば十分である.

2 $\mathrm{co}\varphi^2(n)=2^e$ の解

『オイラー余関数の逆関数について』では, $\mathrm{co}\varphi(n)=2^e$ の解が $a=2^{e+1}, a=2^\epsilon p(p=2^{e-\epsilon+1}-1\in\mathrm{prime})$ と書けることを示した.
$\mathrm{co}\varphi^2(n)=2^e$ の解はこれより厳しくなることが証明できる.

2^e	n	
2^1	2^2	
2^2	2^3	$2\cdot 3$
2^3	2^4	$2^2\cdot 3$
2^4	2^5	$2^3\cdot 3$
2^5	2^6	$2^4\cdot 3$
2^6	2^7	$2^5\cdot 3$
2^7	2^8	$2^6\cdot 3$
2^8	2^9	$2^7\cdot 3$
2^9	2^{10}	$2^8\cdot 3$
2^{10}	2^{11}	$2^9\cdot 3$

表 2: $\mathrm{co}\varphi^2(n)=2^e$

定理 3. $\mathrm{co}\varphi^2(n)=2^e(e>0)$ の解は

- $e=1$ のとき $n=4$
- $e>1$ のとき $n=2^{e+1}, 3\cdot 2^{e-1}$

に限る.

Proof. $n-2\varphi^2(n)=2^e$ より, $n:\mathrm{even}=2^fL(f>0, L:\mathrm{odd})$ と書ける.
これを代入すると, $2^fL-2\varphi(2^{f-1}\varphi(L))=2^e$.
$L=1$ を仮定すると $2^f-2\varphi(2^{f-1})=2^e$.
$f=1$ とすると $n=2$ となるが, これは $\mathrm{co}\varphi^2(n)=2^e$ を満たさないため $f>1$ としてよい.
このとき $2^f-2^{f-1}=2^e$, つまり $2^{f-1}=2^e$.

したがって $f = e + 1$ より $n = 2^{e+1}$ が得られる.
次に $L > 1$ とする.
$L : \mathrm{odd}$ より $L > 2$, したがって $\varphi(L) : \mathrm{even}$.
よって $2\varphi(2^{f-1}\varphi(L)) = 2^f\varphi(\varphi(L))$ が成り立つ.
これを代入すると $2^f L - 2^f\varphi^2(L) = 2^e$, したがって $L - \varphi(\varphi(L)) = 2^{e-f}$ となる.
(1) $\varphi(\varphi(L)) : \mathrm{odd}$ の場合
このとき $\varphi(L) = 1, 2$ より $L = 3$.
$L - \varphi(\varphi(L)) = 3 - 1 = 2 = 2^{e-f}$ より $f = e - 1$.
ここから $n = 3 \cdot 2^{e-1}$ が得られる.
ただし $f = e - 1 > 0$ より $e = 1$ の場合はこの解が存在しないことに注意.
(2) $\varphi(\varphi(L)) : \mathrm{even}$ の場合
$L : \mathrm{odd}$ より $L - \varphi(\varphi(L)) = 2^{e-f} : \mathrm{odd}$, したがって $e = f, L - \varphi(\varphi(L)) = 1$ が成り立つ.
ここで $L - \varphi(\varphi(L)) = \mathrm{co}\varphi^2(L) + \varphi(\varphi(L)) = 1$.
つまり $\mathrm{co}\varphi^2(L) = 1 - \varphi(\varphi(L)) \leq 0$.
この不等式を満たす L は $1, 2$ しか存在しないが, どちらも $L : \mathrm{odd}, L > 1$ の仮定に反する. □

3 $\mathrm{co}\varphi^k$ の定義とその値

これまでの議論を一般化し, $\mathrm{co}\varphi^k(n) = n - 2^{k-1}\varphi^k(n)$ と定義する.
以降 $k > 2$ は定数とする.
また, $\varphi^0(n) = n$ とする.

命題 1. $\mathrm{co}\varphi^k(n) \leq 0$ を満たすならば, $\varphi^k(n) = 1$.

Proof. $\varphi^k(n) \geq 2$ を仮定する.
このとき $\varphi^j(n)$ はすべての $1 \leq j \leq k$ に関して 2 以上である.
つまり $\varphi^j(n) : \mathrm{even}$.
ここで $\varphi^0(n) = n$ とすると, $\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ より $\varphi^k(n) = n\prod_{0\leq j<k}\prod_{p|\varphi^j(n)}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ が成り立つ.
$j > 0$ に対して $2|\varphi^j(n)$ なので, $2 \leq \varphi^k(n) \leq n\prod_{1\leq j<k}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2^{k-1}}$
したがって $2 \cdot 2^{k-1} \leq n$, つまり $n \geq 2^k$.
しかし, n が偶数のとき上の不等式の等号が成り立たないため, $n > 2^k$.
$\mathrm{co}\varphi^k(n) = n - 2^{k-1}\varphi^k(n) > 2^k - 2 \cdot 2^{k-1} = 0$.
命題の対偶が証明されたため, 命題も真である. □

系 1. $\mathrm{co}\varphi^k(n) = C$ $(C \leq 0) \Longleftrightarrow n = 2^{k-1} + C$.

Proof. $\mathrm{co}\varphi^k(n) \leq 0$ より,$\varphi^k(n) = 1$.
したがって $\mathrm{co}\varphi^k(n) = n - 2^{k-1}\varphi^k(n) = n - 2^{k-1} = C$.
つまり $n = 2^{k-1} + C$.
上の命題の証明から, $\varphi^k(n) \geq 2$ ならば $n > 2^k$ なので $\varphi^k(n) = 1$.

代入すると $\mathrm{co}\varphi^k(n) = n - 2^{k-1} = C$ となるから, これは実際に解である. $\square$

このような n 全体の集合を S とおく.
無限個の解が存在するときの条件の前に, 補助関数とそれについての命題を証明する.

定義 1. $\overline{\varphi}^k(n) \coloneqq n \prod_{0\le j<k} \prod_{p|\varphi^j(n), p\ne 2} \left(1-\frac{1}{p}\right)$.

命題 2. n が奇数かつ合成数のとき, $\overline{\varphi}^k(n) \le n - \sqrt{n}$.

Proof. $j=0$ のときの p に n の最小素因数 $2<q\le\sqrt{n}$ が含まれるため,
$\overline{\varphi}^k(n) = n \prod_{0\le j<k} \prod_{p|\varphi^j(n), p\ne 2} \left(1-\frac{1}{p}\right) \le n\left(1-\frac{1}{q}\right) \le n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n - \sqrt{n}$. $\square$

命題 3. n が $\varphi^{k-1}(n) > 1$ を満たす奇素数で, $n-1 = 2^e L (e>0, L:\mathrm{odd})$ と書けるとき, $\overline{\varphi}^k(n) = 2^e\overline{\varphi}^{k-1}(L)$.

Proof.
$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi}^k(n) &= n \prod_{0\le j<k} \prod_{p|\varphi^j(n), p\ne 2} \left(1-\frac{1}{p}\right) = n \prod_{p|n, p\ne 2}\left(1-\frac{1}{p}\right) \prod_{1\le j<k} \prod_{p|\varphi^j(n), p\ne 2} \left(1-\frac{1}{p}\right) \\
&= \varphi(n) \prod_{0\le j<k-1} \prod_{p|\varphi^j(n-1), p\ne 2} \left(1-\frac{1}{p}\right) = (n-1) \prod_{0\le j<k-1} \prod_{p|\varphi^j(2^eL), p\ne 2} \left(1-\frac{1}{p}\right) \\
&= 2^e L \prod_{0\le j<k-1} \prod_{p|\varphi^j(L), p\ne 2} \left(1-\frac{1}{p}\right) \\
&= 2^e \overline{\varphi}^{k-1}(L).
\end{aligned}
$$
$\square$

これは $k=1$ のときも, 空積を 1(つまり $\overline{\varphi}^0(n) = 1$) と定義すれば成り立つことに注意.

命題 4. n 番目のフェルマ数を F_n と書いて, 自然数 $E>1$ について $E+1 = 2^t L (t\ge 0, L:\mathrm{odd})$ と書けるとする. このときすべての $e>t$ について $F_t \,|\, 2^E F_e + 1$.

Proof. 以下の合同式ではすべて $\bmod F_t$ で考える.
$$
\begin{aligned}
2^E F_e + 1 &= 2^E\left(2^{2^e}+1\right)+1 = 2^E\left(2^{2^t\cdot 2^{e-t}}+1\right)+1 = 2^E\left((F_t-1)^{2^{e-t}}+1\right)+1 \\
&\equiv 2^E\left((-1)^{2^{e-t}}+1\right)+1
\end{aligned}
$$
ここで $e>t$ より, 2^{e-t} は偶数であるから,
$$
\begin{aligned}
2^E F_e + 1 &\equiv 2^E(1+1)+1 \equiv 2^{E+1}+1 \equiv 2^{2^t L}+1 \equiv \left(2^{2^t}\right)^L + 1 \\
&\equiv (-1)^L + 1
\end{aligned}
$$
L は奇数なので, $2^E F_e + 1 \equiv 0 \mod F_t$. $\square$

$F_e > F_t > 1$ であるから, これは $2^E F_e + 1$ と書ける素数は有限個であることを示している.

定理 4. $\mathrm{co}\varphi^k(n) = C$ が無限個の解を生成するならば,
$C = 1, 1 + \sum_{1\le j<k} \prod_{1\le l\le j} 2^{e_l} = 1 + 2^{e_1} + 2^{e_1}2^{e_2} + \cdots + 2^{e_1}2^{e_2}\ldots 2^{e_{k-1}}$
のいずれかである.
このとき,

- $C=1$ のときフェルマ素数全体の集合.
- $C=1+\sum_{1\le j<k}\prod_{1\le l\le j}2^{e_l}=1+2^{e_1}+2^{e_1}2^{e_2}+\cdots+2^{e_1}2^{e_2}\dots 2^{e_{k-1}}$ のとき

  $n_0=n,\ n_{i+1}=\dfrac{n_i-1}{2^{e_{i+1}}}$ で定義される数列において, すべての $0\le i<k$ に対して n_i が素数となるような n 全体の集合.

を S_C とおくと, $\varphi^k(n)>1$ を満たす $n\in S_C$ は $\mathrm{co}\varphi^k(n)=C$ の解になっており, また S_C に含まれない解は有限個である.

Proof. 証明の方法はほぼ同じである.
さらに, Pillai (1929)[1] より, $\varphi^k(n)=1$ を満たすとき, $k\ge\left\lfloor\log_3\dfrac{n}{2}\right\rfloor+1$ が成り立つ.
整理すれば $n\le 2\cdot 3^{k-1}$ となって, これは有限個である.
したがってこの場合も除外してよい.
この場合 $\varphi^k(n)\ge 2$, つまりすべての $1<j\le k$ について $\varphi^j(n):\mathrm{even}$ である.
すると $\varphi^k(n)=\varphi^{k-1}(\varphi(n))$ であるから,
$2^{k-1}\varphi^k(n)=2^{k-1}\varphi(n)\prod_{1\le j<k}\prod_{p|\varphi^j(n)}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)=\varphi(n)\prod_{1\le j<k}\prod_{p|\varphi^j(n),p\ne2}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$ と表される.
n が合成数のとき, $2^{k-1}\varphi^k(n)\le n-\sqrt{n}$.
よって $\mathrm{co}\varphi^k(n)=n-2^{k-1}\varphi^k(n)\ge n-(n-\sqrt{n})=\sqrt{n}$.
したがって C が固定されている場合, $\mathrm{co}\varphi^2(n)=C$ に合成数の解は無限に存在できない.
つまり n は奇素数なので, $2^{k-1}\varphi^k(n)=n\left\{\prod_{p|n}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\right\}\left\{\prod_{1\le j<k}\prod_{p|\varphi^j(n),p\ne2}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\right\}=\overline{\varphi}^k(n)$.
よって $\mathrm{co}\varphi^k(n)=n-\overline{\varphi}^k(n)$.
$n-1=2^{e_1}n_1(e_1>0,n_1:\mathrm{odd})$ と表すと $\mathrm{co}\varphi^k(n)=n-2^{e_1}\overline{\varphi}^{k-1}(n_1)$.
n_1 が合成数とすると,
$C=\mathrm{co}\varphi^k(n)=n-2^{e_1}\varphi^{k-1}(n_1)\ge n-2^{e_1}(n_1-\sqrt{n_1})=1+2^{e_1}\sqrt{n_1}\ge 1+\sqrt{2^{e_1}n_1}=1+\sqrt{n-1}$.
したがってこの場合も無限に存在する解の列として不適切である.
$n_1=1$ の場合, $n=2^{e_1}+1$ はフェルマ素数. また, $C=n-2^{e_1}=1$.
次に n_1 は素数のとき, $n_1-1=2^{e_2}n_2$ と表すと $\mathrm{co}\varphi^k(n)=n-2^{e_1+e_2}\overline{\varphi}^{k-2}(n_2)$.
この操作を繰り返していく.
厳密にすると, $1\le i<k$ において, $\mathrm{co}\varphi^k(n)=n-\overline{\varphi}^{k-i}(n_i)\prod_{1\le j\le i}2^{e_j}$ とする.
ただし, $n_0=n$ として, すべての $1\le j\le i$ について $n_{j-1}-1=2^{e_j}n_j$, $n_{j-1}:\mathrm{odd\ prime}$ を仮定する.
n_i が合成数とすると, $\varphi^{k-i}(n_i)\le n_i-\sqrt{n_i}$.
すると

$$\begin{aligned}\mathrm{co}\varphi^k(n)&\ge n-(n_i-\sqrt{n_i})\prod_{1\le j\le i}2^{e_j}=n+\sqrt{n_i}\prod_{1\le j\le i}2^{e_j}-n_i\prod_{1\le j\le i}2^{e_j}\\&=n+\sqrt{n_i}\prod_{1\le j\le i}2^{e_j}-(n_{i-1}-1)\prod_{1\le j\le i-1}2^{e_j}\ge n+\sqrt{n_i}\prod_{1\le j\le i}2^{e_j}-n_{i-1}\prod_{1\le j\le i-1}2^{e_j}\\&=\dots\\&\ge n+\sqrt{n_i}\prod_{1\le j\le i}2^{e_j}-n=\sqrt{n_i}\prod_{1\le j\le i}2^{e_j}\end{aligned}$$

これを二乗すると $C^2 \geq n_i \prod_{1\leq j\leq i} (2^{e_j})^2$.

ここで $n = 1 + \sum_{1\leq j<i} \prod_{1\leq l\leq j} 2^{e_l} + n_i \prod_{1\leq j\leq i} 2^{e_j}$ を証明する.

(読みやすくすると $n = 1 + 2^{e_1} + 2^{e_1}2^{e_2} + 2^{e_1}2^{e_2}2^{e_3} + \cdots + 2^{e_1}2^{e_2}\cdots 2^{e_i}n_i$ ということになる.)

まず $i = 1$ のときは $n = 1 + 2^{e_1}n_1$ より成り立つ.

$i-1$ のとき成り立つとすると

$$n = 1 + \sum_{1\leq j<i-1} \prod_{1\leq l\leq j} 2^{e_l} + n_{i-1} \prod_{1\leq j\leq i-1} 2^{e_j} = 1 + \sum_{1\leq j<i-1} \prod_{1\leq l\leq j} 2^{e_l} + (1 + 2^{e_i}n_i) \prod_{1\leq j\leq i-1} 2^{e_j}$$

$$= 1 + \sum_{1\leq j<i-1} \prod_{1\leq l\leq j} 2^{e_l} + \prod_{1\leq l\leq i-1} 2^{e_l} + n_i \prod_{1\leq j\leq i} 2^{e_j}$$

$$= 1 + \sum_{1\leq j<i} \prod_{1\leq l\leq j} 2^{e_l} + n_i \prod_{1\leq j\leq i} 2^{e_j}$$

より成り立つ.

$$\frac{n}{C^2} \leq \frac{1}{4^i} + \sum_{1\leq j<i} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} \leq \frac{i+1}{2^i} \leq 1$$

よって $n \leq C^2$, つまり n_i が合成数の解は無限に存在できない.

$n_i = 1$ とするとこれは解で, このとき $I = i$. 帰納法から導かれた n の展開式から,

$$C = n - \prod_{1\leq j\leq i} 2^{e_j} = 1 + \sum_{1\leq j<i} \prod_{1\leq l\leq j} 2^{e_l}.$$

ここで C は固定されているから, e のあり得る組み合わせも有限個である.

$i > 1$ とすると, $n_{i-1} = 1 + 2^{e_i}n_i = 1 + 2^{e_i}$ はフェルマ素数.

$n_{i-2} = 2^{e_{i-1}}n_{i-1} + 1$.

この形の素数は有限個しかありえないので, $i = 1$.

このとき $n = n_0 = 2^{e_1}n_1 + 1 = 2^{e_1}$ がフェルマ素数で,

$C = 1 + \sum_{1\leq j<1} \prod_{1\leq l\leq j} 2^{e_l}$ が空和となって $C = 1$.

n_i : odd prime とすると $n_i - 1 = 2^{e_{i+1}}n_{i+1}$ と書けて, これを繰り返すことができる.

$i = k-1$ のときに n_i : odd prime となったとすると, $I \geq k$.

$$\mathrm{co}\varphi^k(n) = n - \overline{\varphi}^0(n_{k-1}) \prod_{1\leq j\leq k} 2^{e_j} = n - \prod_{1\leq j\leq k} 2^{e_j}.$$

このとき, 上の計算と同様に, $C = 1 + \sum_{1\leq j<k} \prod_{1\leq l\leq j} 2^{e_l}$. □

参考文献

[1] Pillai, S. S. (1929). On some functions connected with $\varphi(n)$. *Bulletin of the American Mathematical Society, 35*(6), 837-841.