

有理数ベクトルの行列進展開

矢作 浩樹

2011年2月2日

目次

1	目的	2
2	方法	3
2.1	方針	3
2.2	使ったプログラム	5
3	結果	9
4	考察と推測	28
4.1	考察	28
4.2	推測	30
5	感想	31

1 目的

素数 p を法とした一般フィボナッチ数列を $\{a_n\}$ 、ベクトル $[a_n, a_{n+1}]$ を b_n としてベクトル列 $\{b_n\}$ を定義する。

$\{b_n\}$ には必ず $b_1 = b_k$ を満たす $k > 1$ が存在する。この時最小の $k - 1$ を周期、 $[b_1, b_2, \dots, b_{k-1}]$ を軌道と呼ぶ。

有理数ベクトル $\frac{\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}}{p}$ を $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって展開する行列進展開について研究した。

一般フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ の一般項は漸化式 $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ を満たす。

ベクトル $g_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ の左から $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を掛けると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = g_{n+1}$$

であるから、 $g_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} g_n$ である。

$$\frac{G \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}}{p} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix}}{p} \quad (v_n < p)$$

集合 $T = [[0, 0], [0, 1], \dots, [0, p-1], [1, 0], \dots, [p-1, 0], \dots, [p-1, p-1]]$ を全空間 T と呼ぶ。全空間 T は軌道の和集合であり、 p^2 個の要素がある。

2 方法

2.1 方針

$$\frac{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}}{p} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix}}{p} \dots (*)$$

列 $\{q_n\}, \{r_n\}$ をそれぞれ $q_n = [u_n, u_{n+1}], r_n = [v_n, v_{n+1}]$ と定義する。

$b_{n+1} = r_n$ だから、 $[b_1, b_2, \dots, b_{k-1}] = [b_1, r_1, r_2, \dots, r_{k-2}]$ より軌道を求めることができる。

それぞれの p について類方程式、軌道の数、最大周期を求める。

また、 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $x^2 - x - 1$ なので、 $x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ が整数解を持つものと持たないもので分類する。

尚、集合 $Q = [q_1, q_2, \dots, q_{k-1}]$ として、これについても観察するために $(*)$ のように $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に自然数 t を掛けたものを改めて G として用いる。

$$(*) \text{ の左辺} = \begin{pmatrix} ta_{n+1} \\ t(a_n + a_{n+1}) \end{pmatrix}$$

t を掛けない、つまり $t = 1$ の時は $a_n < p$ より q_n は $[0, 0]$ または $[0, 1]$ の 2 通りしかないので観察しにくい。以後、 $t = 10$ として観察した。(ただし t と p は互いに素でなければならないので、 $p = 2, 5$ の時は考えない)

表 1 例 : $p = 11$ のときの軌道

周期	軌道
1	[[0,0]]
5	[[3, 2],[9, 6],[5, 7],[4, 10],[1, 8]] [[6, 4],[7, 1],[10, 3],[8, 9],[2, 5]]
10	[[10, 10],[1, 2],[9, 8],[3, 5],[6, 3],[8, 2],[9, 1],[10, 1],[10, 0],[0, 1]] [[9, 9],[2, 4],[7, 5],[6, 10],[1, 6],[5, 4],[7, 2],[9, 2],[9, 0],[0, 2]] [[8, 8],[3, 6],[5, 2],[9, 4],[7, 9],[2, 6],[5, 3],[8, 3],[8, 0],[0, 3]] [[7, 7],[4, 8],[3, 10],[1, 9],[2, 1],[10, 8],[3, 4],[7, 4],[7, 0],[0, 4]] [[6, 6],[5, 10],[1, 7],[4, 3],[8, 4],[7, 10],[1, 5],[6, 5],[6, 0],[0, 5]] [[5, 5],[6, 1],[10, 4],[7, 8],[3, 7],[4, 1],[10, 6],[5, 6],[5, 0],[0, 6]] [[4, 4],[7, 3],[8, 1],[10, 2],[9, 10],[1, 3],[8, 7],[4, 7],[4, 0],[0, 7]] [[3, 3],[8, 5],[6, 9],[2, 7],[4, 2],[9, 5],[6, 8],[3, 8],[3, 0],[0, 8]] [[2, 2],[9, 7],[4, 6],[5, 1],[10, 5],[6, 7],[4, 9],[2, 9],[2, 0],[0, 9]] [[1, 1],[10, 9],[2, 3],[8, 6],[5, 8],[3, 9],[2, 10],[1, 10],[1, 0],[0, 10]] [[7, 6],[5, 9],[2, 8],[3, 1],[10, 7],[4, 5],[6, 2],[9, 3],[8, 10],[1, 4]]

表 2 $p = 11$ のときのまとめ

周期	1	5	10
軌道の数	1	2	11

最大周期 : 10

軌道の数 : $11 + 2 + 1 = 14$

類方程式 : $11^2 = 10 \times 11 + 5 \times 2 + 1 \times 1$

ほぼ全ての p について周期 1 の軌道は $[[0,0]]$ のみであるが、周期 1 の軌道が複数存在する事例があるので後にそれについて考察する。

2.2 使ったプログラム

```
/** 2つのリストを結合する **/  
append0(Z=[]+Z).  
append0([A|Z]=[A|X]+Y):- append0(Z=X+Y).  
  
/** リストを2分割してその左側をとる **/  
left(A=[]+A,0):- !.  
left(A=B+C,N):- N>0,N1 is N-1,! ,  
left(A=B1+[X|C],N1),  
append0(B=B1+[X]),! .  
  
/** リストを3分割する**/  
list_3cut(L=A+B+C,X,Y):- Z=Y-X,  
left(L=A+E,X),  
left(E=B+C,Z).  
  
/** 要素Aがリストの中の何番目に入っているか求める **/  
member(A,[A|_],1).  
member(A,[_|L],N):- member(A,L,N1),N is N1+1.  
  
/** AとBの最大公約数を求める **/  
gcd(A=(A,0)):- !.  
gcd(D=(A,B)):- B1 is A mod B,A1 = B,  
gcd(D=(A1,B1)).  
  
/** I以上J未満の素数pに対して、 $x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ の整数解とその個数を求める **/  
sosuu_hantei(I<J):- sh_aux(I,J,2).  
sh_aux(J,J,_).  
sh_aux(I,J,I):- write(I),write(' -> '),type_hantei(I),  
I1 is I+1,  
sh_aux(I1,J,2).  
sh_aux(I,J,K):- I=<J,I1 is I+1,  
gcd(D=(I,K)),  
(D=1) -> K1 is K+1,sh_aux(I,J,K1);(sh_aux(I1,J,2))).  
  
type_hantei(P):- th_aux(1,P,0).  
th_aux(P,P,K):- write('kai-kosuu:'),write(K),nl.  
th_aux(I,P,K):- I=<P,I1 is I+1,
```

```

N is (I*I-I-1) mod P,
((N=0) -> write('t='),write(I),tab(1),K1 is K+1,th_aux(I1,P,K1);
(th_aux(I1,P,K))).

```

```

/** 集合 Q を求める **/

```

```

q1q2(P):- q1q2_aux([0,0]/P, []).
q1q2_aux([P,0]/P,_).
q1q2_aux([A,P]/P,L):- A<P,A1 is A+1,
q1q2_aux([A1,0]/P,L).
q1q2_aux([A,B]/P,L):- A<P,
((member([A,B],L)) ->
B1 is B+1,q1q2_aux([A,B1]/P,L);(
write([A,B]),write('kidou'),nl,
gfib_q1q2([A,B]/P,L))).

```

```

gfib_q1q2([A,B]/P,L):- write('[ '),
gfib_q1q2_aux([A,B]/P,A,B,0,L).
gfib_q1q2_aux([A,B]/P,T1,T2,K,L):-
N1 is 10*T2,
N2 is 10*(T1+T2),
Q1 is floor(N1/P),
Q2 is floor(N2/P),
R1 is N1 mod P,
R2 is N2 mod P,
K1 is K+1,
L1=[[R1,R2]|L],
((R1 is A,R2 is B) ->
write([Q1,Q2]),write(' ')),
write(',K='),write(K1),
nl,B1 is B+1,q1q2_aux([A,B1]/P,L1);(
write([Q1,Q2]),write(' '),
gfib_q1q2_aux([A,B]/P,R1,R2,K1,L1))).

```

```

/** 軌道を求める **/

```

```

r1r2(P):- r1r2_aux([0,0]/P, []).
r1r2_aux([P,0]/P,_).
r1r2_aux([A,P]/P,L):- A<P,A1 is A+1,
r1r2_aux([A1,0]/P,L).
r1r2_aux([A,B]/P,L):- A<P,
((member([A,B],L)) ->

```

```

B1 is B+1,r1r2_aux([A,B1]/P,L);(
write([A,B]),write('kidou'),nl,
gfib_r1r2([A,B]/P,L)).

gfib_r1r2([A,B]/P,L):- write(''),
gfib_r1r2_aux([A,B]/P,A,B,0,L).
gfib_r1r2_aux([A,B]/P,T1,T2,K,L):-
N1 is 10*T2,
N2 is 10*(T1+T2),
R1 is N1 mod P,
R2 is N2 mod P,
K1 is K+1,
L1=[[R1,R2]|L],
((R1 is A,R2 is B) ->
write([R1,R2]),write('')),
write(',K='),write(K1),
nl,B1 is B+1,r1r2_aux([A,B1]/P,L1);(
write([R1,R2]),write(','),
gfib_r1r2_aux([A,B]/P,R1,R2,K1,L1)).

```

```

/** 軌道の種類、軌道の数、最大周期、類方程式を求める **/
gfib_custom(P):- gfib_c_aux([0,0]/P,[],0,0,[]).
gfib_c_aux([P,0]/P,_,M,N,R):- write('kidounokazu:'),write(M),nl,
write('MAXsyuuki:'),write(N),nl,
list_seiri(R,RR),
PP is P^2,
rui(PP,R,RR).
gfib_c_aux([A,P]/P,L,M,N,R):- A1 is A+1,
gfib_c_aux([A1,0]/P,L,M,N,R).
gfib_c_aux([A,B]/P,L,M,N,R):- A<P,
((member([A,B],L)) ->
B1 is B+1,gfib_c_aux([A,B1]/P,L,M,N,R);(
write([A,B]),write('kidou'),nl,
fib([A,B]/P,L,M,N,R))).

```

```

fib([A,B]/P,L,M,N,R):- fib_aux([A,B]/P,A,B,0,L,M,N,R).
fib_aux([A,B]/P,T1,T2,K,L,M,N,R):-
C1 is 10*T2,
C2 is 10*(T1+T2),

```

```

R1 is C1 mod P,
R2 is C2 mod P,
K1 is K+1,
L1=[[R1,R2]|L],
((R1 is A,R2 is B) ->
  B1 is B+1,
  M1 is M+1,
  N1 is max(K1,N),
  RR=[K1|R],
  gfib_c_aux([A,B1]/P,L1,M1,N1,RR);(
  fib_aux([A,B]/P,R1,R2,K1,L1,M,N,R))).

```

```

list_seiri(L,R):- list_max(L,N),ls_aux(L,1,N,[],R).
ls_aux(_,J,J,LL,R):- LL1=[J|LL],R=LL1.
ls_aux(L,I,J,LL,R):- I<J,I1 is I+1,
((member(I,L) -> LL1=[I|LL],ls_aux(L,I1,J,LL1,R);
  ls_aux(L,I1,J,LL,R))).

```

```

list_max(L,N):- lm_aux(L,0,N).
lm_aux([],K,N):- N=K.
lm_aux(L,K,N):- L=[KK|LL],
((K>KK) -> lm_aux(LL,K,N);lm_aux(LL,KK,N)).

```

```

rui(P,L,LL):- write(P),write(=),rui_aux(L,LL,0).
rui_aux([],[],_).
rui_aux(L,LL,K):- LL=[X|LL1],
( member(X,L) -> member(X,L,M),
  M1 is M-1,
  list_3cut(L=A+_+C,M1,M),
  append0(L1=A+C),
  K1 is K+1,
  rui_aux(L1,LL,K1);
  write(+),write(X),write(*),write(K),
  rui_aux(L,LL1,0)).

```

3 結果

$$x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{p} \cdots (**)$$

の解が存在する時としない時で分ける

表3 (**)の解が0個 part1

p	$p-1$	p^2-1	類方程式	軌道の数	最大周期 N	$(p-1)/N$	$(p^2-1)/N$
3	2	8	$9=8*1+1*1$	2	8	0.25	1
7	6	48	$49=48*1+1*1$	2	48	0.125	1
13	12	168	$169=84*2+1*1$	3	84	0.142857143	2
17	16	288	$289=144*2+1*1$	3	144	0.111111111	2
23	22	528	$529=528*1+1*1$	2	528	0.041666667	1
37	36	1368	$1369=228*6+1*1$	7	228	0.157894737	6
43	42	1848	$1849=1848*1+1*1$	2	1848	0.022727273	1
47	46	2208	$2209=736*3+1*1$	4	736	0.0625	3
53	52	2808	$2809=1404*2+1*1$	3	1404	0.037037037	2
67	66	4488	$4489=4488*1+1*1$	2	4488	0.014705882	1
73	72	5328	$5329=296*18+1*1$	19	296	0.243243243	18
83	82	6888	$6889=6888*1+1*1$	2	6888	0.011904762	1
97	96	9408	$9409=4704*2+1*1$	3	4704	0.020408163	2
103	102	10608	$10609=3536*3+1*1$	4	3536	0.028846154	3
107	106	11448	$11449=3816*3+1*1$	4	3816	0.027777778	3
113	112	12768	$12769=2128*6+1*1$	7	2128	0.052631579	6
127	126	16128	$16129=5376*3+1*1$	4	5376	0.0234375	3
137	136	18768	$18769=552*34+1*1$	35	552	0.246376812	34
157	156	24648	$24649=12324*2+1*1$	3	12324	0.012658228	2
163	162	26568	$26569=26568*1+1*1$	2	26568	0.006097561	1
167	166	27888	$27889=27888*1+1*1$	2	27888	0.005952381	1
173	172	29928	$29929=14964*2+1*1$	3	14964	0.011494253	2
193	192	37248	$37249=18624*2+1*1$	3	18624	0.010309278	2
197	196	38808	$38809=19404*2+1*1$	3	19404	0.01010101	2

表4 (**)の解が0個 part2

p	$p-1$	p^2-1	類方程式	軌道の数	最大周期 N	$(p-1)/N$	$(p^2-1)/N$
223	222	49728	49729=49728*1+1*1	2	49728	0.004464286	1
227	226	51528	51529=51528*1+1*1	2	51528	0.004385965	1
233	232	54288	54289=3016*18+1*1	19	3016	0.076923077	18
257	256	66048	66049=33024*2+1*1	3	33024	0.007751938	2
263	262	69168	69169=23056*3+1*1	4	23056	0.011363636	3
277	276	76728	76729=38364*2+1*1	3	38364	0.007194245	2
283	282	80088	80089=80088*1+1*1	2	80088	0.003521127	1
293	292	85848	85849=42924*2+1*1	3	42924	0.006802721	2
307	306	94248	94249=13464*7+1*1	8	13464	0.022727273	7
313	312	97968	97969=48984*2+1*1	3	48984	0.006369427	2
317	316	100488	100489=50244*2+1*1	3	50244	0.006289308	2
337	336	113568	113569=56784*2+1*1	3	56784	0.00591716	2
347	346	120408	120409=40136*3+1*1	4	40136	0.00862069	3
353	352	124608	124609=1888*66+1*1	67	1888	0.186440678	66
367	366	134688	134689=134688*1+1*1	2	134688	0.002717391	1
373	372	139128	139129=69564*2+1*1	3	69564	0.005347594	2
383	382	146688	146689=146688*1+1*1	2	146688	0.002604167	1
397	396	157608	157609=78804*2+1*1	3	78804	0.005025126	2
433	432	187488	187489=93744*2+1*1	3	93744	0.004608295	2
443	442	196248	196249=196248*1+1*1	2	196248	0.002252252	1
457	456	208848	208849=34808*6+1*1	7	34808	0.013100437	6
463	462	214368	214369=71456*3+1*1	4	71456	0.006465517	3
467	466	218088	218009=218008*1+1*1	2	218088	0.002136752	1
487	486	237168	237169=237168*1+1*1	2	237168	0.00204918	1

表 5 (**) の解が 2 個 part1

p	$p-1$	p^2-1	類方程式	軌道の数	最大周期 N	$(p-1)/N$	$(p^2-1)/N$
11	10	120	$121=10*11+5*2+1*1$	14	10	1	12
19	18	360	$361=18*18+9*2+6*3+1*1$	24	18	1	20
29	28	840	$841=28*30+1*1$	31	28	1	30
31	30	960	$961=30*30+6*5+5*6+1*1$	42	30	1	32
41	40	1680	$1681=40*42+1*1$	43	40	1	42
59	58	3480	$3481=58*59+29*2+1*1$	62	58	1	60
61	60	3720	$3721=15*240+5*12+3*20+1*1$	273	15	4	248
71	70	5040	$5041=70*71+35*2+1*1$	74	70	1	72
79	78	6240	$6241=78*79+39*2+1*1$	82	78	1	80
89	88	7920	$7921=22*356+2*44+1*1$	401	22	4	360
101	100	10200	$10201=100*102+1*1$	103	100	1	102
109	108	11880	$11881=27*436+1*109$	545	27	4	440
131	130	17160	$17161=130*131+65*2+1*1$	134	130	1	132
139	138	19320	$19321=46*417+23*6+1*1$	424	46	3	420
149	148	22200	$22201=74*300+1*1$	301	74	2	300
151	150	22800	$22801=150*151+3*50+1*1$	202	150	1	152
179	178	32040	$32041=178*179+89*2+1*1$	182	178	1	180
181	180	32760	$32761=180*181+60*3+1*1$	185	180	1	182
191	190	36480	$36481=190*191+95*2+1*1$	194	190	1	192
199	198	39600	$39601=198*199+99*2+1*1$	202	198	1	200

表 6 (**) の解が 2 個 part2

p	$p-1$	p^2-1	類方程式	軌道の数	最大周期 N	$(p-1)/N$	$(p^2-1)/N$
211	210	44520	$44521=210*210+105*2+70*3+1*1$	216	210	1	212
229	228	52440	$52441=228*229+76*3+1*1$	233	228	1	230
239	238	57120	$57121=238*239+119*2+1*1$	242	238	1	240
241	240	58080	$58081=240*240+80*3+48*5+1*1$	249	240	1	242
251	250	63000	$63001=250*251+125*2+1*1$	254	250	1	252
269	268	72360	$72361=134*540+1*1$	541	134	2	540
271	270	73440	$3441=270*270+135*2+54*5+1*1$	278	270	1	272
281	280	78960	$78961=56*1405+8*35+1*1$	1441	56	5	1410
311	310	96720	$96721=310*310+155*2+62*5+1*1$	318	310	1	312
331	330	109560	$109561=110*990+55*6+22*15+1*1$	1012	110	3	996
349	348	121800	$121801=348*350+1*1$	351	348	1	350
359	358	128880	$128881=358*359+179*2+1*1$	362	358	1	360
379	378	143640	$143641=378*378+189*2+126*3+1*1$	384	378	1	380
389	388	151320	$151321=194*780+1*1$	781	194	2	780
401	400	160800	$160801=100*1604+5*80+1*1$	1685	100	4	1608
409	408	167280	$167281=408*409+136*3+1*1$	413	408	1	410
419	418	175560	$175561=418*419+209*2+1*1$	422	418	1	420
421	420	177240	$177241=105*1688+1*1$	1689	105	4	1688
431	430	185760	$185761=430*431+43*10+1*1$	442	430	1	432
439	438	192720	$192721=438*438+219*2+146*3+1*1$	444	438	1	440
449	448	201600	$201601=448*450+1*1$	451	448	1	450
461	460	212520	$212521=460*462+1*1$	463	460	1	462
479	478	229440	$229441=478*479+239*2+1*1$	482	478	1	480
491	490	241080	$241081=490*491+245*2+1*1$	494	490	1	492
499	498	249000	$249001=498*498+249*2+166*3+1*1$	504	498	1	500

表7 集合 Q と軌道 $p = 3, 7, 11$

p	周期	集合 Q	軌道
3	1	[[0, 0]]	[[0, 0]]
3	8	[[3, 3],[3, 6],[6, 10],[0, 6],[6, 6] [6, 13],[3, 10],[0, 3]]	[[1, 1],[1, 2],[2, 0],[0, 2],[2, 2], [2, 1],[1, 0],[0, 2]]
7	1	[[0, 0]]	[[0, 0]]
7	48	[[1, 1],[4, 8],[5, 8],[5, 12],[8, 15], [7, 12],[8, 10],[0, 5],[7, 7],[1, 2], [8, 12],[8, 14],[2, 8],[5, 14],[2, 10], [0, 8],[5, 5],[7, 14],[2, 4],[2, 11], [4, 12],[8, 11],[4, 10],[0, 2],[8, 8], [5, 11],[4, 11],[4, 7],[1, 4],[2, 7], [1, 10],[0, 4],[2, 2],[8, 17],[1, 7], [1, 5],[7, 11],[4, 5],[7, 10],[0, 1], [4, 4],[2, 5],[7, 15],[7, 8],[5, 7], [1, 8],[5, 10],[0, 7]]	[[3, 3],[2, 4],[5, 4],[5, 6],[4, 5], [1, 6],[4, 0],[0, 5],[1, 1],[3, 6], [4, 6],[4, 2],[6, 4],[5, 2],[6, 0], [0, 4],[5, 5],[1, 2],[6, 2],[6, 3], [2, 6],[4, 3],[2, 0],[0, 6],[4, 4], [5, 3],[2, 3],[2, 1],[3, 2],[6, 1], [3, 0],[0, 2],[6, 6],[4, 1],[3, 1], [3, 5],[1, 3],[2, 5],[1, 0],[0, 3], [2, 2],[6, 5],[1, 5],[1, 4],[5, 1], [3, 4],[5, 0],[0, 1]]
11	1	[[0, 0]]	[[0, 0]]
11	10	[[0, 0],[9, 18],[1, 2],[7, 15],[4, 7], [2, 8],[1, 9],[0, 9],[0, 10],[0, 9]]	[[10, 10],[1, 2],[9, 8],[3, 5],[6, 3] [8, 2],[9, 1],[10, 1],[10, 0],[0, 1]]
11	10	[[1, 1],[8, 16],[3, 5],[4, 10],[9, 14], [5, 6],[3, 8],[1, 8],[1, 10],[0, 8]]	[[9, 9],[2, 4],[7, 5],[6, 10],[1, 6], [5, 4],[7, 2],[9, 2],[9, 0],[0, 2]]
11	10	[[2, 2],[7, 14],[5, 8],[1, 6],[3, 11], [8, 14],[5, 7],[2, 7],[2, 10],[0, 7]]	[[8, 8],[3, 6],[5, 2],[9, 4],[7, 9], [2, 6],[5, 3],[8, 3],[8, 0],[0, 3]]
11	10	[[3, 3],[6, 12],[7, 10],[9, 11],[8, 9], [0, 2],[7, 16],[3, 6],[3, 10],[0, 6]]	[[7, 7],[4, 8],[3, 10],[1, 9],[2, 1], [10, 8],[3, 4],[7, 4],[7, 0],[0, 4]]
11	10	[[4, 4],[5, 10],[9, 13],[6, 7],[2, 6], [3, 10],[9, 15],[4, 5],[4, 10],[0, 5]]	[[6, 6],[5, 10],[1, 7],[4, 3],[8, 4], [7, 10],[1, 5],[6, 5],[6, 0],[0, 5]]
11	10	[[5, 5],[4, 9],[0, 6],[3, 12],[7, 13], [6, 9],[0, 4],[5, 14],[5, 10],[0, 4]]	[[5, 5],[6, 1],[10, 4],[7, 8],[3, 7], [4, 1],[10, 6],[5, 6],[5, 0],[0, 6]]
11	10	[[6, 6],[3, 7],[2, 9],[0, 8],[1, 10], [9, 17],[2, 3],[6, 13],[6, 10],[0, 3]]	[[4, 4],[7, 3],[8, 1],[10, 2],[9, 10], [1, 3],[8, 7],[4, 7],[4, 0],[0, 7]]
11	10	[[7, 7],[2, 5],[4, 11],[8, 13],[6, 8], [1, 5],[4, 12],[7, 12],[7, 10],[0, 2]]	[[3, 3],[8, 5],[6, 9],[2, 7],[4, 2], [9, 5],[6, 8],[3, 8],[3, 0],[0, 8]]
11	10	[[8, 8],[1, 3],[6, 14],[5, 9],[0, 5], [4, 13],[6, 11],[8, 11],[8, 10],[0, 1]]	[[2, 2],[9, 7],[4, 6],[5, 1],[10, 5], [6, 7],[4, 9],[2, 9],[2, 0],[0, 9]]
11	10	[[9, 9],[0, 1],[8, 17],[2, 4],[5, 12], [7, 11],[8, 10],[9, 10],[9, 10],[0, 0]]	[[1, 1],[10, 9],[2, 3],[8, 6],[5, 8], [3, 9],[2, 10],[1, 10],[1, 0],[0, 10]]
11	10	[[3, 4],[5, 11],[8, 12],[7, 9],[0, 3], [6, 15],[4, 8],[1, 7],[2, 10],[9, 16]]	[[7, 6],[5, 9],[2, 8],[3, 1],[10, 7], [4, 5],[6, 2],[9, 3],[8, 10],[1, 4]]
11	5	[[7, 8],[1, 4],[5, 13],[6, 10],[9, 12]]	[[3, 2],[9, 6],[5, 7],[4, 10],[1, 8]]
11	5	[[4, 6],[3, 9],[0, 7],[2, 11],[8, 13]]	[[6, 4],[7, 1],[10, 3],[8, 9],[2, 5]]

表 8 集合 Q と軌道 $p = 13$

p	周期	集合 Q	軌道
13	1	[[0, 0]]	[[0, 0]]
13	84	[[0, 0],[7, 15],[3, 10],[7, 16],[1, 8], [4, 10],[0, 6],[1, 1],[5, 10],[7, 11], [5, 12],[3, 6],[9, 10],[0, 2],[3, 3], [0, 1],[5, 13],[0, 4],[6, 13],[8, 10], [0, 4],[6, 6],[1, 3],[0, 6],[1, 9], [2, 7],[6, 10],[0, 9],[2, 2],[3, 6], [1, 2],[3, 8],[4, 5],[3, 10],[0, 8], [4, 4],[6, 12],[3, 4],[6, 6],[9, 10], [7, 10],[0, 6],[9, 9],[2, 4],[6, 9], [2, 3],[8, 11],[5, 10],[0, 3],[8, 8], [4, 9],[2, 8],[4, 7],[6, 13],[0, 10], [0, 7],[6, 6],[9, 18],[4, 6],[9, 15], [3, 6],[1, 10],[0, 5],[3, 3],[8, 16], [9, 13],[8, 10],[7, 12],[3, 10],[0, 0], [7, 7],[6, 13],[8, 17],[6, 11],[5, 14], [6, 10],[0, 1],[5, 5],[3, 7],[6, 15], [3, 13],[0, 9],[2, 10],[0, 3]]	[[10, 10],[9, 5],[11, 10],[9, 2],[7, 6], [8, 0],[0, 2],[7, 7],[5, 10],[9, 7], [5, 4],[1, 12],[3, 0],[0, 4],[1, 1], [10, 7],[5, 1],[10, 8],[2, 11],[6, 0], [0, 8],[2, 2],[7, 1],[10, 2],[7, 3], [4, 9],[12, 0],[0, 3],[4, 4],[1, 2], [7, 4],[1, 6],[8, 5],[11, 0],[0, 6], [8, 8],[2, 4],[1, 8],[2, 12],[3, 10], [9, 0],[0, 12],[3, 3],[4, 8],[2, 3], [4, 11],[6, 7],[5, 0],[0, 11],[6, 6], [8, 3],[4, 6],[8, 9],[12, 1],[10, 0], [0, 9],[12, 12],[3, 6],[8, 12],[3, 5], [11, 2],[7, 0],[0, 5],[11, 11],[6, 12], [3, 11],[6, 10],[9, 4],[1, 0],[0, 10], [9, 9],[12, 11],[6, 9],[12, 7],[5, 8], [2, 0],[0, 7],[5, 5],[11, 9],[12, 5], [11, 1],[10, 3],[4, 0],[0, 1]]
13	84	[[2, 3],[0, 3],[8, 16],[1, 6],[1, 6], [9, 14],[6, 8],[4, 6],[1, 7],[6, 12], [3, 12],[3, 3],[8, 9],[2, 6],[9, 12], [3, 5],[3, 4],[6, 14],[6, 7],[6, 8], [4, 13],[8, 14],[6, 10],[7, 9],[2, 9], [2, 5],[3, 6],[9, 17],[6, 9],[2, 11], [5, 8],[4, 8],[4, 10],[7, 13],[8, 15], [3, 8],[4, 13],[0, 6],[9, 16],[9, 11], [5, 7],[6, 10],[7, 16],[9, 16],[1, 3], [8, 13],[8, 13],[0, 5],[3, 11],[5, 13], [8, 12],[3, 7],[6, 7],[6, 16],[1, 10], [7, 13],[0, 7],[6, 14],[6, 15],[3, 5], [3, 12],[3, 11],[5, 6],[1, 5],[3, 9], [2, 10],[7, 10],[7, 14],[6, 13],[0, 2], [3, 10],[7, 8],[4, 11],[5, 11],[5, 9], [2, 6],[1, 4],[6, 11],[5, 6],[9, 13], [0, 3],[0, 8],[4, 12],[3, 9]]	[[4, 1],[10, 11],[6, 2],[7, 2],[7, 12], [3, 8],[2, 6],[8, 2],[7, 9],[12, 4], [1, 4],[1, 11],[6, 3],[4, 12],[3, 4], [1, 5],[11, 8],[2, 8],[2, 9],[12, 6], [8, 11],[6, 8],[2, 10],[9, 3],[4, 3], [4, 5],[11, 12],[3, 9],[12, 3],[4, 7], [5, 6],[8, 6],[8, 10],[9, 11],[6, 5], [11, 6],[8, 1],[10, 12],[3, 12],[3, 7], [5, 9],[12, 10],[9, 12],[3, 2],[7, 11], [6, 11],[6, 1],[10, 5],[11, 7],[5, 11], [6, 4],[1, 9],[12, 9],[12, 2],[7, 10], [9, 1],[10, 9],[12, 8],[2, 5],[11, 5], [11, 4],[1, 7],[5, 2],[7, 5],[11, 3], [4, 10],[9, 10],[9, 8],[2, 1],[10, 4], [1, 10],[9, 6],[8, 7],[5, 7],[5, 3], [4, 2],[7, 8],[2, 7],[5, 12],[3, 1], [10, 1],[10, 6],[8, 4],[1, 3]]

表9 集合 Q と軌道 $p = 17$ part1

p	周期	集合 Q	軌道
17	1	[[0,0]]	[[0, 0]]
17	144	[[0, 0],[5, 11],[7, 16],[4, 11],[1, 8],[8, 15], [8, 11],[1, 10],[0, 7],[6, 6],[4, 9],[4, 11], [1, 2],[9, 17],[0, 4],[7, 12],[9, 10],[0, 4], [1, 1],[1, 3],[5, 12],[9, 12],[3, 7],[6, 11], [7, 12],[3, 10],[0, 5],[2, 2],[9, 18],[8, 12], [3, 5],[8, 14],[1, 9],[4, 5],[8, 10],[0, 8], [2, 2],[3, 7],[0, 5],[8, 14],[7, 15],[2, 3], [5, 14],[7, 10],[0, 0],[5, 5],[8, 17],[6, 14], [7, 11],[7, 8],[2, 8],[8, 11],[7, 10],[0, 6], [4, 4],[7, 14],[1, 1],[7, 9],[4, 10],[5, 7], [0, 9],[4, 10],[0, 1],[1, 1],[7, 15],[2, 9], [4, 13],[5, 6],[4, 7],[6, 13],[5, 10],[0, 2], [9, 9],[4, 8],[2, 3],[5, 8],[8, 11],[1, 4], [1, 8],[8, 10],[0, 2],[3, 3],[5, 10],[5, 8], [8, 17],[0, 2],[9, 15],[2, 7],[0, 10],[0, 5], [8, 8],[8, 16],[4, 7],[0, 7],[6, 12],[3, 8], [2, 7],[6, 10],[0, 4],[7, 7],[0, 1],[1, 7], [6, 14],[1, 5],[8, 10],[5, 14],[1, 10],[0, 1], [7, 7],[6, 12],[9, 14],[1, 5],[2, 4],[7, 16], [4, 5],[2, 10],[0, 9],[4, 4],[1, 2],[3, 5], [2, 8],[2, 11],[7, 11],[1, 8],[2, 10],[0, 3], [5, 5],[2, 5],[8, 18],[2, 10],[5, 9],[4, 12], [5, 5],[16, 15],[14, 4],[6, 10],[15, 7],[2, 16] [5, 6],[4, 13],[5, 12],[3, 6],[4, 10],[0, 7]]	[[10, 10],[15, 13],[11, 8],[12, 3],[13, 14],[4, 15], [14, 3],[13, 0],[0, 11],[8, 8],[12, 7],[2, 3], [13, 16],[7, 1],[10, 12],[1, 16],[7, 0],[0, 2], [3, 3],[13, 9],[5, 16],[7, 6],[9, 11],[8, 13], [11, 6],[9, 0],[0, 5],[16, 16],[7, 14],[4, 6], [9, 15],[14, 2],[3, 7],[2, 15],[14, 0],[0, 4], [6, 6],[9, 1],[10, 15],[14, 12],[1, 5],[16, 9], [5, 12],[1, 0],[0, 10],[15, 15],[14, 11],[8, 12], [1, 13],[11, 4],[6, 14],[4, 13],[11, 0],[0, 8], [12, 12],[1, 2],[3, 13],[11, 7],[2, 10],[15, 1], [10, 7],[2, 0],[0, 3],[13, 13],[11, 5],[16, 7], [2, 9],[5, 8],[12, 11],[8, 9],[5, 0],[0, 16], [7, 7],[2, 4],[6, 9],[5, 14],[4, 3],[13, 2], [3, 14],[4, 0],[0, 6],[9, 9],[5, 10],[15, 14], [4, 1],[10, 16],[7, 5],[16, 1],[10, 0],[0, 15], [14, 14],[4, 8],[12, 1],[10, 11],[8, 6],[9, 4], [6, 11],[8, 0],[0, 12],[1, 1],[10, 3],[13, 11], [8, 2],[3, 15],[14, 10],[15, 2],[3, 0],[0, 13], [11, 11],[8, 16],[7, 2],[3, 5],[16, 12],[1, 8], [12, 5],[16, 0],[0, 7],[2, 2],[3, 6],[9, 5], [16, 4],[6, 13],[11, 3],[13, 4],[6, 0],[0, 9], [9, 10],[5, 10],[0, 8],[8, 8],[2, 4],[7, 10], [7, 10],[15, 0],[0, 14],[4, 4],[6, 12],[1, 10], [15, 8],[12, 9],[5, 6],[9, 8],[12, 0],[0, 1]]

表 10 集合 Q と軌道 $p = 17$ part2

p	周期	集合 Q	軌道
17	144	[[1, 2],[3, 11],[1, 7],[0, 8],[2, 8],[2, 5], [8, 12],[3, 11],[7, 12],[9, 15],[8, 12],[9, 17], [6, 10],[5, 10],[5, 14],[7, 15],[8, 9],[4, 12], [3, 4],[7, 12],[3, 4],[1, 6],[4, 6],[4, 11], [7, 14],[7, 13],[5, 5],[8, 11],[7, 15],[8, 15], [2, 11],[1, 11],[1, 9],[4, 11],[7, 8],[8, 14], [7, 9],[4, 4],[7, 8],[2, 2],[9, 12],[9, 13], [5, 9],[4, 7],[0, 1],[7, 13],[5, 11],[7, 10], [5, 12],[3, 12],[3, 8],[8, 13],[5, 7],[6, 9], [4, 8],[8, 9],[4, 6],[4, 5],[8, 15],[8, 17], [0, 8],[8, 14],[1, 3],[5, 7],[0, 3],[5, 11], [1, 4],[7, 14],[7, 7],[6, 7],[0, 5],[2, 8], [8, 17],[6, 8],[8, 12],[9, 11],[7, 11],[7, 14], [1, 7],[6, 8],[2, 7],[0, 4],[1, 7],[0, 2], [3, 9],[4, 9],[4, 5],[2, 4],[1, 10],[5, 7], [6, 15],[2, 7],[6, 15],[8, 13],[5, 13],[5, 8], [2, 5],[2, 6],[4, 14],[1, 8],[2, 4],[1, 4], [7, 8],[8, 8],[8, 10],[5, 8],[2, 11],[1, 5], [2, 10],[5, 15],[2, 11],[7, 17],[0, 7],[0, 6], [4, 10],[5, 12],[9, 18],[2, 6],[4, 8],[2, 9], [4, 7],[6, 7],[6, 11],[1, 6],[4, 12],[3, 10], [5, 11],[1, 10],[5, 13],[5, 14],[1, 4],[1, 2], [9, 11],[1, 5],[8, 16],[4, 12],[9, 16],[4, 8], [8, 15],[2, 5],[2, 12],[3, 12],[9, 14],[7, 11]]	[[13, 6],[9, 3],[13, 1],[10, 4],[6, 4],[6, 15], [14, 6],[9, 13],[11, 16],[7, 15],[14, 16],[7, 11], [8, 10],[15, 10],[15, 12],[1, 15],[14, 7],[2, 6], [9, 12],[1, 6],[9, 2],[3, 8],[12, 8],[12, 13], [11, 12],[1, 9],[5, 15],[14, 13],[11, 15],[14, 5], [16, 3],[13, 3],[13, 7],[2, 13],[11, 14],[4, 12], [1, 7],[2, 12],[1, 4],[6, 16],[7, 16],[7, 9], [5, 7],[2, 1],[10, 13],[11, 9],[5, 13],[11, 10], [15, 6],[9, 6],[9, 14],[4, 9],[5, 11],[8, 7], [2, 14],[4, 7],[2, 8],[12, 15],[14, 15],[14, 1], [10, 14],[4, 2],[3, 9],[5, 1],[10, 9],[5, 3], [13, 12],[1, 12],[1, 11],[8, 1],[10, 5],[16, 14], [4, 11],[8, 14],[4, 16],[7, 13],[11, 13],[11, 2], [3, 11],[8, 4],[6, 1],[10, 2],[3, 1],[10, 6], [9, 7],[2, 7],[2, 5],[16, 2],[3, 10],[15, 11], [8, 5],[16, 11],[8, 15],[14, 9],[5, 9],[5, 4], [6, 5],[16, 8],[12, 2],[3, 4],[6, 2],[3, 12], [1, 14],[4, 14],[4, 10],[15, 4],[6, 3],[13, 5], [16, 10],[15, 5],[16, 13],[11, 1],[10, 1],[10, 8], [12, 10],[15, 16],[7, 4],[6, 8],[12, 4],[6, 7], [2, 11],[8, 11],[8, 3],[13, 8],[12, 6],[9, 10], [15, 3],[13, 10],[15, 9],[5, 2],[3, 2],[3, 16], [7, 3],[13, 15],[14, 8],[12, 16],[7, 8],[12, 14], [4, 5],[16, 5],[16, 6],[9, 16],[7, 12],[1, 3]]

表 11 集合 Q と軌道 $p = 19$ part1

p	周期	集合 Q	軌道
19	1	[[0,0]]	[[0,0]]
19	18	[[0, 0],[5, 10],[5, 7],[8, 11],[5, 15],[2, 10], [5, 11],[5, 8],[4, 12],[1, 3],[1, 2],[1, 6], [8, 8],[9, 13],[6, 11],[5, 14],[2, 10],[0, 1]]	[[10, 10],[5, 10],[5, 17],[18, 11],[15, 5],[12, 10], [5, 11],[15, 8],[4, 2],[1, 3],[11, 2],[1, 16], [8, 18],[9, 13],[16, 11],[15, 4],[2, 0],[0, 1]]
19	18	[[1, 1],[0, 1],[0, 5],[7, 13],[1, 10],[5, 11], [0, 3],[1, 6],[8, 14],[2, 6],[3, 4],[2, 3], [6, 7],[8, 17],[3, 13],[1, 8],[4, 10],[0, 2]]	[[1, 1],[10, 1],[10, 15],[17, 3],[11, 10],[5, 1], [10, 3],[11, 16],[8, 4],[2, 6],[3, 4],[2, 13], [16, 17],[18, 7],[13, 3],[11, 8],[4, 0],[0, 2]]
19	18	[[1, 1],[5, 11],[5, 13],[6, 14],[7, 15],[7, 11], [5, 14],[7, 15],[2, 6],[3, 9],[4, 6],[3, 10], [5, 6],[8, 11],[0, 4],[7, 12],[6, 10],[0, 3]]	[[11, 11],[15, 11],[15, 13],[16, 14],[7, 15],[17, 11], [15, 14],[7, 5],[12, 6],[3, 9],[14, 6],[3, 10], [5, 16],[8, 1],[10, 14],[7, 12],[6, 0],[0, 3]]
19	18	[[2, 2],[1, 2],[1, 1],[5, 6],[3, 11],[0, 2], [1, 6],[3, 3],[6, 8],[4, 12],[6, 8],[4, 7], [3, 5],[7, 14],[7, 16],[3, 6],[8, 10],[0, 4]]	[[2, 2],[1, 2],[1, 11],[15, 6],[3, 1],[10, 2], [1, 6],[3, 13],[16, 8],[4, 12],[6, 8],[4, 7], [13, 15],[17, 14],[7, 6],[3, 16],[8, 0],[0, 4]]
19	18	[[2, 2],[6, 12],[6, 9],[4, 7],[8, 16],[3, 12], [6, 7],[8, 12],[1, 10],[5, 5],[7, 10],[5, 14], [2, 4],[7, 8],[4, 7],[8, 11],[0, 10],[0, 5]]	[[12, 12],[6, 12],[6, 9],[14, 17],[18, 6],[3, 12], [6, 17],[18, 2],[1, 10],[5, 15],[17, 10],[5, 4], [2, 14],[7, 8],[4, 17],[18, 1],[10, 0],[0, 5]]
19	18	[[3, 3],[1, 3],[1, 7],[3, 9],[4, 11],[5, 13], [1, 9],[4, 10],[5, 12],[6, 8],[9, 12],[6, 11], [0, 3],[6, 12],[1, 9],[4, 5],[2, 10],[0, 6]]	[[3, 3],[11, 3],[11, 7],[13, 9],[14, 11],[15, 3], [11, 9],[14, 10],[5, 12],[6, 18],[9, 12],[6, 1], [10, 13],[16, 2],[1, 9],[14, 5],[12, 0],[0, 6]]
19	18	[[3, 3],[6, 13],[6, 15],[2, 11],[0, 6],[8, 13], [6, 11],[0, 8],[9, 14],[7, 12],[1, 4],[7, 7], [8, 12],[6, 15],[7, 11],[0, 9],[4, 10],[0, 7]]	[[13, 13],[16, 13],[16, 5],[12, 1],[10, 16],[8, 13], [16, 1],[10, 18],[9, 14],[7, 2],[1, 14],[7, 17], [18, 12],[6, 15],[17, 1],[10, 9],[14, 0],[0, 7]]
19	18	[[4, 4],[2, 4],[2, 3],[1, 2],[6, 12],[1, 4], [2, 2],[6, 7],[3, 6],[8, 15],[2, 6],[8, 14], [7, 11],[5, 9],[4, 12],[6, 13],[6, 10],[0, 8]]	[[4, 4],[2, 4],[2, 3],[11, 12],[6, 2],[1, 4], [2, 12],[6, 7],[13, 16],[8, 5],[12, 16],[8, 14], [7, 11],[15, 9],[14, 12],[6, 13],[16, 0],[0, 8]]
19	18	[[4, 4],[7, 14],[7, 11],[0, 4],[2, 7],[3, 4], [7, 14],[2, 5],[7, 8],[9, 18],[4, 8],[9, 11], [5, 10],[5, 13],[1, 4],[2, 7],[8, 10],[0, 9]]	[[14, 14],[7, 14],[7, 1],[10, 4],[2, 7],[13, 14], [7, 4],[2, 15],[17, 18],[9, 8],[4, 18],[9, 11], [15, 10],[5, 3],[11, 4],[2, 17],[18, 0],[0, 9]]
19	18	[[5, 5],[2, 5],[2, 8],[9, 15],[7, 12],[6, 15], [2, 5],[7, 14],[2, 11],[0, 1],[5, 11],[0, 8], [4, 9],[4, 6],[8, 15],[7, 12],[1, 10],[0, 0]]	[[5, 5],[12, 5],[12, 18],[9, 15],[17, 12],[6, 5], [12, 15],[17, 4],[2, 1],[10, 11],[15, 1],[10, 8], [4, 9],[14, 16],[8, 15],[17, 2],[1, 0],[0, 10]]
19	18	[[5, 5],[7, 15],[7, 16],[8, 17],[3, 7],[8, 15], [7, 17],[3, 12],[6, 13],[1, 4],[7, 13],[1, 5], [2, 8],[4, 10],[5, 7],[3, 6],[3, 10],[0, 1]]	[[15, 15],[17, 15],[17, 16],[8, 7],[13, 17],[18, 15], [17, 7],[13, 12],[6, 3],[11, 14],[7, 3],[11, 5], [12, 8],[4, 10],[5, 7],[13, 6],[3, 0],[0, 11]]
19	18	[[6, 6],[3, 6],[3, 4],[7, 8],[9, 13],[1, 6], [3, 8],[9, 11],[0, 5],[2, 7],[8, 15],[2, 12], [1, 7],[3, 4],[2, 8],[9, 10],[5, 10],[0, 2]]	[[6, 6],[3, 6],[3, 14],[7, 18],[9, 3],[11, 6], [3, 18],[9, 1],[10, 5],[12, 17],[18, 5],[12, 2], [1, 7],[13, 4],[2, 18],[9, 10],[5, 0],[0, 12]]

表 12 集合 Q と軌道 $p = 19$ part2

p	周期	集合 Q	軌道
19	18	[[6, 6],[8, 16],[8, 12],[6, 10],[5, 8],[4, 6], [8, 10],[5, 9],[4, 7],[3, 11],[0, 7],[3, 8], [9, 16],[3, 7],[8, 10],[5, 14],[7, 10],[0, 3]]	[[16, 16],[8, 16],[8, 12],[6, 10],[5, 8],[4, 16], [8, 10],[5, 9],[14, 7],[13, 1],[10, 7],[13, 18], [9, 6],[3, 17],[18, 10],[5, 14],[7, 0],[0, 13]]
19	18	[[7, 7],[3, 7],[3, 10],[5, 12],[1, 3],[6, 7], [3, 12],[1, 7],[8, 9],[4, 14],[2, 9],[4, 5], [7, 15],[2, 11],[5, 12],[1, 8],[9, 10],[0, 4]]	[[7, 7],[13, 7],[13, 10],[5, 2],[1, 13],[16, 7], [13, 2],[1, 17],[18, 9],[14, 4],[2, 9],[14, 15], [17, 5],[12, 11],[15, 2],[1, 18],[9, 0],[0, 14]]
19	18	[[7, 7],[8, 17],[8, 18],[4, 13],[6, 8],[9, 17], [8, 13],[6, 16],[3, 11],[5, 7],[3, 11],[5, 12], [6, 14],[2, 5],[2, 3],[6, 13],[1, 10],[0, 5]]	[[17, 17],[18, 17],[18, 8],[4, 13],[16, 18],[9, 17], [18, 13],[16, 6],[3, 11],[15, 7],[13, 11],[15, 12], [6, 4],[2, 5],[12, 13],[16, 3],[11, 0],[0, 15]]
19	18	[[8, 8],[4, 8],[4, 6],[3, 5],[2, 4],[2, 8], [4, 5],[2, 4],[7, 13],[6, 10],[5, 13],[6, 9], [4, 13],[1, 8],[9, 15],[2, 7],[3, 10],[0, 6]]	[[8, 8],[4, 8],[4, 6],[3, 5],[12, 4],[2, 8], [4, 5],[12, 14],[7, 13],[16, 10],[5, 13],[16, 9], [14, 3],[11, 18],[9, 5],[12, 7],[13, 0],[0, 16]]
19	18	[[8, 8],[9, 18],[9, 14],[2, 6],[8, 9],[4, 8], [9, 16],[8, 13],[1, 5],[7, 13],[6, 15],[7, 16], [3, 12],[1, 2],[6, 6],[8, 11],[5, 10],[0, 7]]	[[18, 18],[9, 18],[9, 4],[2, 16],[8, 9],[14, 18], [9, 16],[8, 3],[11, 15],[17, 13],[16, 15],[17, 6], [3, 2],[1, 12],[6, 16],[8, 11],[15, 0],[0, 17]]
19	18	[[9, 9],[4, 9],[4, 12],[1, 8],[4, 4],[7, 9], [4, 8],[4, 11],[5, 7],[8, 16],[8, 17],[8, 13], [1, 11],[0, 6],[3, 8],[4, 5],[7, 10],[0, 8]]	[[9, 9],[14, 9],[14, 2],[1, 8],[4, 14],[7, 9], [14, 8],[4, 11],[15, 17],[18, 16],[8, 17],[18, 3], [11, 1],[10, 6],[3, 8],[4, 15],[17, 0],[0, 18]]
19	6	[[2, 3],[1, 7],[8, 14],[7, 16],[8, 12],[1, 5]]	[[12, 3],[11, 17],[18, 14],[7, 16],[8, 2],[1, 5]]
19	9	[[7, 8],[4, 13],[1, 3],[6, 12],[6, 14],[7, 10], [5, 8],[9, 12],[1, 5]]	[[17, 8],[4, 3],[11, 13],[16, 12],[6, 14],[7, 10], [5, 18],[9, 2],[1, 15]]
19	6	[[5, 6],[3, 5],[7, 9],[4, 13],[6, 14],[2, 10]]	[[5, 6],[3, 15],[17, 9],[14, 13],[16, 4],[2, 10]]
19	9	[[5, 6],[8, 16],[3, 7],[3, 5],[2, 9],[4, 11], [0, 7],[8, 14],[2, 11]]	[[15, 16],[8, 6],[3, 7],[13, 5],[12, 9],[14, 1], [10, 17],[18, 4],[2, 11]]
19	6	[[0, 2],[6, 11],[5, 8],[9, 17],[3, 8],[4, 11]]	[[10, 12],[6, 11],[15, 18],[9, 7],[13, 8],[4, 1]]

表 13 集合 Q と軌道 $p = 23$ part1

p	周期	集合 Q	軌道
23	1	[[0, 0]]	[[0, 0]]
23	528	[[0, 0],[4, 8],[6, 10],[4, 13],[9, 12],[6, 7], [3, 4],[7, 16],[9, 17],[8, 13],[9, 11],[7, 8], [6, 10],[8, 18],[2, 9],[5, 11],[7, 13],[9, 13], [0, 1],[7, 11],[7, 11],[3, 6],[9, 10],[0, 5], [6, 6],[5, 10],[4, 6],[5, 8],[6, 9],[1, 10], [8, 11],[7, 14],[3, 7],[3, 8],[6, 16],[0, 10], [4, 13],[0, 3],[9, 13],[4, 6],[0, 8],[6, 15], [6, 16],[0, 6],[0, 9],[5, 14],[3, 10],[0, 4], [7, 7],[8, 16],[5, 7],[8, 10],[4, 6],[9, 13], [0, 6],[0, 5],[2, 10],[8, 10],[4, 11],[3, 6], [5, 5],[6, 8],[6, 12],[1, 11],[3, 10],[4, 4], [7, 11],[3, 11],[3, 3],[4, 5],[2, 10],[0, 1], [7, 7],[3, 7],[8, 17],[3, 6],[5, 14],[3, 5], [6, 11],[3, 8],[2, 3],[0, 6],[5, 9],[5, 7], [8, 14],[7, 10],[4, 12],[6, 9],[5, 6],[5, 11], [7, 9],[5, 9],[5, 12],[1, 8],[2, 10],[0, 6], [0, 0],[8, 17],[3, 10],[8, 17],[8, 15],[2, 4], [7, 9],[5, 13],[9, 15],[6, 7],[8, 13],[4, 7], [3, 11],[7, 16],[5, 9],[1, 3],[4, 7],[8, 16], [0, 3],[4, 13],[4, 12],[6, 13],[9, 10],[0, 1], [3, 3],[0, 0],[8, 13],[0, 7],[3, 8],[2, 11], [7, 13],[4, 8],[6, 14],[7, 17],[3, 12],[1, 10], [8, 16],[0, 7],[8, 16],[9, 12],[1, 7],[3, 11], [3, 12],[1, 2],[1, 9],[1, 8],[6, 10],[0, 9], [5, 5],[6, 13],[0, 5],[6, 10],[8, 13],[9, 16], [0, 2],[1, 10],[4, 11],[7, 10],[8, 12],[6, 13], [0, 1],[3, 7],[3, 4],[3, 12],[6, 10],[8, 9], [5, 12],[6, 12],[6, 6],[9, 10],[4, 10],[0, 3], [4, 4],[7, 15],[6, 14],[7, 13],[0, 8],[6, 11], [3, 12],[6, 6],[5, 6],[0, 3],[0, 9],[1, 5], [6, 9],[5, 10],[8, 15],[2, 9],[1, 3],[0, 3], [4, 9],[1, 9],[1, 4],[3, 6],[5, 10],[0, 2], [1, 1],[7, 14],[7, 11],[7, 15],[6, 10],[4, 9], [5, 9],[1, 7],[8, 11],[3, 5],[6, 6],[9, 14], [7, 13],[4, 13],[0, 8],[2, 6],[9, 15],[6, 12],	[[10, 10],[8, 16],[22, 10],[8, 21],[3, 14],[2, 9], [21, 18],[19, 22],[13, 19],[6, 21],[3, 17],[9, 16], [22, 20],[16, 6],[14, 13],[15, 17],[9, 21],[3, 1], [10, 17],[9, 17],[9, 7],[1, 22],[13, 0],[0, 15], [12, 12],[5, 10],[8, 12],[5, 16],[22, 3],[7, 20], [16, 17],[9, 8],[11, 9],[21, 16],[22, 2],[20, 10], [8, 1],[10, 21],[3, 11],[18, 2],[20, 16],[22, 15], [12, 2],[20, 2],[20, 13],[15, 8],[11, 0],[0, 18], [19, 19],[6, 12],[5, 19],[6, 10],[8, 22],[13, 1], [10, 2],[20, 5],[4, 20],[16, 10],[8, 7],[1, 12], [5, 15],[12, 16],[22, 4],[17, 7],[1, 10],[8, 18], [19, 7],[1, 7],[1, 11],[18, 5],[4, 0],[0, 17], [9, 9],[21, 19],[6, 9],[21, 12],[5, 8],[11, 15], [12, 7],[1, 6],[14, 1],[10, 12],[5, 13],[15, 19], [6, 18],[19, 10],[8, 14],[2, 13],[15, 12],[5, 17], [9, 13],[15, 13],[15, 4],[17, 6],[14, 0],[0, 2], [20, 20],[16, 9],[21, 20],[16, 19],[6, 5],[4, 18], [19, 13],[15, 21],[3, 15],[12, 19],[6, 11],[18, 9], [21, 17],[9, 12],[5, 3],[7, 11],[18, 19],[6, 2], [20, 11],[18, 11],[18, 14],[2, 21],[3, 0],[0, 7], [1, 1],[10, 20],[16, 1],[10, 9],[21, 6],[14, 17], [9, 11],[18, 16],[22, 18],[19, 9],[21, 4],[17, 20], [16, 2],[20, 19],[6, 22],[13, 4],[17, 9],[21, 7], [1, 4],[17, 4],[17, 3],[7, 16],[22, 0],[0, 13], [15, 15],[12, 1],[10, 15],[12, 20],[16, 21],[3, 2], [20, 4],[17, 10],[8, 17],[9, 20],[16, 14],[2, 1], [10, 7],[1, 9],[21, 8],[11, 14],[2, 20],[16, 13], [15, 14],[2, 14],[2, 22],[13, 10],[8, 0],[0, 11], [18, 18],[19, 15],[12, 18],[19, 1],[10, 16],[22, 7], [1, 14],[2, 12],[5, 2],[20, 1],[10, 3],[7, 15], [12, 13],[15, 20],[16, 5],[4, 3],[7, 1],[10, 11], [18, 3],[7, 3],[7, 8],[11, 12],[5, 0],[0, 4], [17, 17],[9, 18],[19, 17],[9, 15],[12, 10],[8, 13], [15, 3],[7, 19],[6, 7],[1, 15],[12, 22],[13, 18], [19, 11],[18, 1],[10, 6],[14, 22],[13, 15],[12, 4],

表 14 集合 Q と軌道 $p = 23$ part2

[1, 6],[9, 16],[9, 15],[2, 7],[8, 10],[0, 2], [6, 6],[0, 1],[7, 16],[0, 4],[7, 16],[5, 13], [4, 6],[9, 17],[3, 9],[5, 14],[7, 14],[3, 11], [7, 12],[1, 5],[6, 13],[9, 14],[3, 4],[7, 12], [6, 14],[3, 4],[3, 8],[2, 7],[3, 10],[0, 9], [1, 1],[3, 6],[0, 1],[3, 11],[7, 7],[8, 12], [1, 4],[3, 10],[8, 13],[4, 11],[7, 15],[2, 6], [0, 2],[6, 14],[7, 8],[6, 15],[2, 11],[7, 9], [1, 5],[2, 5],[2, 3],[9, 10],[8, 10],[0, 6], [9, 9],[5, 11],[3, 9],[5, 6],[0, 7],[3, 12], [6, 15],[2, 3],[0, 2],[1, 6],[0, 8],[2, 11], [3, 9],[1, 1],[7, 10],[4, 8],[2, 6],[0, 6], [9, 18],[2, 8],[2, 8],[6, 13],[0, 10],[0, 4], [3, 3],[4, 9],[5, 13],[4, 11],[3, 10],[8, 9], [1, 8],[2, 5],[6, 12],[6, 11],[3, 3],[9, 9], [5, 6],[9, 16],[0, 6],[5, 13],[9, 11],[3, 4], [3, 3],[9, 13],[9, 10],[4, 5],[6, 10],[0, 5], [2, 2],[1, 3],[4, 12],[1, 9],[5, 13],[0, 6], [9, 13],[9, 14],[7, 9],[1, 9],[5, 8],[6, 13], [4, 14],[3, 11],[3, 7],[8, 8],[6, 9],[5, 15], [2, 8],[6, 8],[6, 16],[5, 14],[7, 10],[0, 8], [2, 2],[6, 12],[1, 2],[6, 13],[4, 5],[6, 14], [3, 8],[6, 11],[7, 16],[9, 13],[4, 10],[4, 12], [1, 5],[2, 9],[5, 7],[3, 10],[4, 13],[4, 8], [2, 10],[4, 10],[4, 7],[8, 11],[7, 10],[0, 3], [9, 9],[1, 2],[6, 9],[1, 2],[1, 4],[7, 15], [2, 10],[4, 6],[0, 4],[3, 12],[1, 6],[5, 12], [6, 8],[2, 3],[4, 10],[8, 16],[5, 12],[1, 3], [9, 16],[5, 6],[5, 7],[3, 6],[0, 10],[0, 8], [6, 6],[9, 19],[1, 6],[9, 12],[6, 11],[7, 8], [2, 6],[5, 11],[3, 5],[2, 2],[6, 7],[8, 9], [1, 3],[9, 12],[1, 3],[0, 7],[8, 12],[6, 8], [6, 7],[8, 17],[8, 10],[8, 11],[3, 10],[0, 0], [4, 4],[3, 6],[9, 14],[3, 9],[1, 6],[0, 3], [9, 17],[8, 9],[5, 8],[2, 9],[1, 7],[3, 6], [9, 18],[6, 12],[6, 15],[6, 7],[3, 9],[1, 10], [4, 7],[3, 7],[3, 13],[0, 9],[5, 10],[0, 6],	[17, 22],[13, 22],[13, 5],[4, 19],[6, 0],[0, 14], [2, 2],[20, 17],[9, 2],[20, 18],[19, 12],[5, 11], [18, 22],[13, 9],[21, 13],[15, 18],[19, 8],[11, 17], [9, 4],[17, 15],[12, 21],[3, 8],[11, 18],[19, 14], [2, 8],[11, 8],[11, 6],[14, 9],[21, 0],[0, 3], [7, 7],[1, 2],[20, 7],[1, 17],[9, 19],[6, 4], [17, 8],[11, 20],[16, 11],[18, 17],[9, 5],[4, 2], [20, 14],[2, 18],[19, 16],[22, 5],[4, 17],[9, 3], [7, 5],[4, 5],[4, 21],[3, 20],[16, 0],[0, 22], [13, 13],[15, 7],[1, 13],[15, 2],[20, 9],[21, 14], [2, 5],[4, 1],[10, 4],[17, 2],[20, 6],[14, 7], [1, 3],[7, 17],[9, 10],[8, 6],[14, 2],[20, 22], [13, 6],[14, 6],[14, 16],[22, 1],[10, 0],[0, 8], [11, 11],[18, 13],[15, 11],[18, 7],[1, 20],[16, 3], [7, 6],[14, 15],[12, 14],[2, 7],[1, 21],[3, 13], [15, 22],[13, 2],[20, 12],[5, 21],[3, 7],[1, 8], [11, 21],[3, 21],[3, 10],[8, 15],[12, 0],[0, 5], [4, 4],[17, 11],[18, 4],[17, 13],[15, 1],[10, 22], [13, 21],[3, 18],[19, 3],[7, 13],[15, 16],[22, 11], [18, 8],[11, 7],[1, 19],[6, 16],[22, 13],[15, 5], [4, 16],[22, 16],[22, 12],[5, 18],[19, 0],[0, 6], [14, 14],[2, 4],[17, 14],[2, 11],[18, 15],[12, 8], [11, 16],[22, 17],[9, 22],[13, 11],[18, 10],[8, 4], [17, 5],[4, 13],[15, 9],[21, 10],[8, 11],[18, 6], [14, 10],[8, 10],[8, 19],[6, 17],[9, 0],[0, 21], [3, 3],[7, 14],[2, 3],[7, 4],[17, 18],[19, 5], [4, 10],[8, 2],[20, 8],[11, 4],[17, 12],[5, 14], [2, 6],[14, 11],[18, 20],[16, 12],[5, 4],[17, 21], [3, 12],[5, 12],[5, 9],[21, 2],[20, 0],[0, 16], [22, 22],[13, 3],[7, 22],[13, 14],[2, 17],[9, 6], [14, 12],[5, 7],[1, 5],[4, 14],[2, 19],[6, 3], [7, 21],[3, 4],[17, 1],[10, 19],[6, 14],[2, 16], [22, 19],[6, 19],[6, 20],[16, 7],[1, 0],[0, 10], [8, 8],[11, 22],[13, 8],[11, 3],[7, 2],[20, 21], [3, 19],[6, 13],[15, 6],[14, 3],[7, 9],[21, 22], [13, 16],[22, 14],[2, 15],[12, 9],[21, 3],[7, 10], [8, 9],[21, 9],[21, 1],[10, 13],[15, 0],[0, 12],
--	--

表 15 集合 Q と軌道 $p = 23$ part3

<p>[5, 5],[2, 4],[3, 5],[2, 6],[9, 11],[3, 8], [6, 7],[3, 13],[4, 13],[9, 16],[9, 10],[8, 14], [3, 10],[4, 9],[1, 4],[7, 10],[8, 16],[9, 16], [5, 10],[8, 10],[8, 15],[6, 13],[4, 10],[0, 7], [8, 8],[2, 5],[2, 8],[2, 4],[3, 9],[5, 10], [4, 10],[8, 12],[1, 8],[6, 14],[3, 13],[0, 5], [2, 6],[5, 6],[9, 11],[7, 13],[0, 4],[3, 7], [8, 13],[0, 3],[0, 4],[7, 12],[1, 10],[0, 7], [3, 3],[9, 18],[2, 3],[9, 15],[2, 3],[4, 6], [5, 13],[0, 2],[6, 10],[4, 5],[2, 5],[6, 8], [2, 7],[8, 14],[3, 6],[0, 5],[6, 15],[2, 7], [3, 5],[6, 15],[6, 11],[7, 12],[6, 10],[0, 0], [8, 8],[6, 13],[9, 18],[6, 8],[2, 12],[1, 7], [8, 15],[6, 9],[1, 6],[5, 8],[2, 4],[7, 13], [9, 17],[3, 5],[2, 11],[3, 4],[7, 8],[2, 10], [8, 14],[7, 14],[7, 16],[0, 9],[1, 10],[0, 3]]</p>	<p>[5, 5],[4, 8],[11, 5],[4, 22],[13, 7],[1, 16], [22, 9],[21, 11],[18, 21],[3, 22],[13, 20],[16, 8], [11, 10],[8, 3],[7, 18],[19, 20],[16, 22],[13, 12], [5, 20],[16, 20],[16, 15],[12, 11],[18, 0],[0, 19], [6, 6],[14, 5],[4, 6],[14, 8],[11, 13],[15, 10], [8, 20],[16, 4],[17, 16],[22, 8],[11, 1],[10, 5], [4, 12],[5, 22],[13, 17],[9, 1],[10, 8],[11, 19], [6, 1],[10, 1],[10, 18],[19, 4],[17, 0],[0, 9], [21, 21],[3, 6],[14, 21],[3, 5],[4, 11],[18, 12], [5, 1],[10, 14],[2, 10],[8, 5],[4, 15],[12, 6], [14, 19],[6, 8],[11, 2],[20, 15],[12, 5],[4, 9], [21, 15],[12, 15],[12, 17],[9, 14],[2, 0],[0, 20], [16, 16],[22, 21],[3, 16],[22, 6],[14, 4],[17, 19], [6, 15],[12, 3],[7, 12],[5, 6],[14, 18],[19, 21], [3, 9],[21, 5],[4, 7],[1, 18],[19, 6],[14, 20], [16, 18],[19, 18],[19, 2],[20, 3],[7, 0],[0, 1]]</p>
--	--

表 16 (**) の解が 2 個のときのその解と、その位数の lcm と最大周期の関連 part2

P	(**) の解	最大周期	2 解の位数の l c m	最大周期/lcm
11	4,8	10	10	1
19	5,15	18	18	1
29	6,24	28	14	2
31	13,19	30	30	1
41	7,35	40	40	1
59	26,34	58	58	1
61	18,44	15	60	0.25
71	9,63	70	70	1
79	30,50	78	78	1
89	10,80	22	44	0.5
101	23,79	100	50	2
109	11,99	27	108	0.25
131	12,120	130	130	1
139	64,76	46	46	1
149	41,109	74	148	0.5
151	28,124	150	50	3
179	75,105	178	178	1
181	14,168	180	90	2
191	89,103	190	190	1
199	62,138	198	22	9
211	33,179	210	42	5
229	82,148	228	114	2
239	16,224	238	238	1
241	52,190	240	240	1
251	118,134	250	250	1
269	72,198	134	268	0.5
271	17,255	270	270	1
281	38,244	56	56	1
311	59,253	310	310	1
331	117,215	110	110	1
349	144,206	348	174	2
359	106,254	358	358	1
379	20,360	378	378	1
389	152,238	194	388	0.5

表 17 (**) の解が 2 個のときのその解と、その位数の lcm と最大周期の関連 part2

P	(**) の解	最大周期	2 解の位数の lcm	最大周期/ lcm
401	112,290	100	200	0.5
409	130,280	408	408	1
419	21,399	418	418	1
421	111,311	105	84	1.25
431	91,341	430	430	1
439	70,370	438	438	1
449	166,284	448	448	1
461	22,440	460	46	10
479	229,251	478	478	1
491	74,418	490	490	1
499	225,275	498	498	1

表 18 $t^2 + t - 1$ が素数である 500 以下の t

t	$t^2 + t - 1$								
2	5	66	4421	169	28729	281	79241	396	157211
3	11	68	4691	171	29411	285	81509	401	161201
4	19	70	4969	174	30449	288	83231	405	164429
5	29	76	5851	176	31151	290	84389	408	166871
6	41	83	6971	180	32579	294	86729	418	175141
8	71	85	7309	181	32941	296	87911	419	175979
9	89	86	7481	184	34039	298	89101	420	176819
10	109	89	8009	186	34781	301	90901	423	179351
11	131	93	8741	188	35531	303	92111	428	183611
13	181	94	8929	191	36671	305	93329	431	186191
15	239	96	9311	193	37441	306	93941	433	187921
16	271	100	10099	195	38219	309	95789	445	198469
19	379	101	10301	196	38611	314	98909	448	201151
20	419	103	10711	199	39799	319	102079	449	202049
21	461	114	13109	203	41411	323	104651	450	202949
24	599	115	13339	206	42641	330	109229	453	205661
26	701	120	14519	209	43889	331	109891	455	207479
28	811	125	15749	215	46439	335	112559	456	208391
30	929	126	16001	218	47741	339	115259	461	212981
31	991	130	17029	219	48179	343	117991	463	214831
35	1259	131	17291	220	48619	349	122149	468	219491
38	1481	134	18089	225	50849	350	122849	471	222311
39	1559	138	19181	230	53129	351	123551	473	224201
41	1721	140	19739	231	53591	354	125669	474	225149
44	1979	141	20021	233	54521	358	128521	475	226099
45	2069	144	20879	236	55931	360	129959	478	228961
46	2161	145	21169	240	57839	361	130681	481	231841
48	2351	148	22051	241	58321	364	132859	486	236681
50	2549	149	22349	244	59779	373	139501	490	240589
53	2861	153	23561	246	60761	374	140249	494	244529
54	2969	154	23869	248	61751	378	143261	495	245519
55	3079	155	24179	258	66821	380	144779	496	246511
56	3191	158	25121	259	67339	385	148609	499	249499
59	3539	159	25439	263	69431	386	149381	500	250499
60	3659	160	25759	264	69959	391	153271		
64	4159	163	26731	265	70489	393	154841		
65	4289	164	27059	268	72091	395	156419		

表 19 $t^2 + t - 1$ が素数でない 500 以下の t part1

t	$t^2 + t - 1$	t	$t^2 + t - 1$	t	$t^2 + t - 1$
1	1	79	6319=71*89	133	17821=71*251
7	55=5*11	80	6479=11*19*31	135	18359=11*1669
12	155=5*31	81	6641=29*229	136	18631=31*601
14	209=11*19	82	6805=5*1361	137	18905=5*19*199
17	305=5*61	84	7139 = 11 ² * 59	139	19459=11*29*61
18	341=11*31	87	7655=5*1531	142	20305=5*31*131
22	505=5*101	88	7831=41*191	143	20591=59*349
23	551=19*29	90	8189=19*431	146	21461=11*1951
25	649=11*59	91	8371=11*761	147	21755=5*19*229
27	755=5*151	92	8555=5*29*59	150	22649=11*29*71
29	869=11*79	95	9119=11*829	151	22951=59*389
32	1055=5*211	97	9505=5*1901	152	23255=5*4651
33	1121=19*59	98	9701=89*109	156	24491=19*1289
34	1189=29*41	99	9899=19*521	157	24805 = 5 * 11 ² * 41
36	1331 = 11 ³	102	10505=5*11*191	161	26081=11*2371
37	1405=5*281	104	10919=61*179	162	26405=5*5281
40	1639=11*149	105	11129=31*359	165	27389=61*449
42	1805 = 5 * 19 ²	106	11341=11*1031	166	27721=19*1459
43	1891=31*61	107	11555=5*2311	167	28055=5*31*181
47	2255=5*11*41	108	11771=79*149	168	28391=11*29*89
49	2449=31*79	109	11989=19*631	170	29069=41*709
51	2651=11*241	110	12209=29*421	172	29755=5*11*541
52	2755=5*19*29	111	12431=31*401	173	30101=31*971
57	3305=5*661	112	12655=5*2531	175	30799=19*1621
58	3421=11*311	113	12881=11*1171	177	31505=5*6301
61	3781=19*199	116	13571=41*331	178	31861=151*211
62	3905=5*11*71	117	13805=5*11*251	179	32219=11*29*101
63	4031=29*139	118	14041=19*739	182	33305=5*6661
67	4555=5*911	119	14279=109*131	183	33671=11*3061
69	4829=11*439	121	14761=29*509	185	34409=19*1811
71	5111=19*269	122	15005=5*3001	187	35155=5*79*89
72	5255=5*1051	123	15251=101*151	189	35909=149*241
73	5401=11*491	124	15499=11*1409	190	36289=11*3299
74	5549=31*179	127	16255=5*3251	192	37055=5*7411
75	5699=41*139	128	16511=11*19*79	194	37829=11*19*181
77	6005=5*1201	129	16769=41*409	197	39005=5*29*269
78	6161=61*101	132	17555=5*3511	198	39401 = 31 ² * 41

表 20 $t^2 + t - 1$ が素数でない 500 以下の t part2

t	$t^2 + t - 1$	t	$t^2 + t - 1$	t	$t^2 + t - 1$
200	40199=61*659	254	64769=239*271	308	95171=19*5009
201	40601=11*3691	255	65279=29*2251	310	96409=229*421
202	41005=5*59*139	256	65791=11*5981	311	97031=11*8821
204	41819=19*31*71	257	66305=5*89*149	312	97655=5*19531
205	42229 = 11 ² * 349	260	67859=11*31*199	313	98281=29*3389
207	43055=5*79*109	261	68381=19*59*61	315	99539=11*9049
208	43471=29*1499	262	68905=5*13781	316	100171=109*919
210	44309=59*751	266	71021=29*31*79	317	100805=5*20161
211	44731=41*1091	267	71555=5*11*1301	318	101441 = 19 ² * 281
212	45155=5*11*821	269	72629=59*1231	320	102719=59*1741
213	45581=19*2399	270	73169=19*3851	321	103361=41*2521
214	46009=139*331	271	73711=11*6701	322	104005=5*11*31*61
216	46871=11*4261	272	74255=5*14851	324	105299=29*3631
217	47305=5*9461	273	74801=131*571	325	105949=101*1049
221	49061=71*691	274	75349=151*499	326	106601 = 11 ² * 881
222	49505=5*9901	275	75899=71*1069	327	107255=5*19*1129
223	49951=11*19*239	276	76451=89*859	328	107911=31*59*59
224	50399=101*499	277	77005=5*15401	329	108569=151*719
226	51301 = 29 ² * 61	278	77561=11*11*641	332	110555=5*22111
227	51755=5*11*941	279	78119=191*409	333	111221=11*10111
228	52211=109*471	280	78679=19*41*101	334	111889=41*2729
229	52669=31*1699	282	79805=5*11*1451	336	113231=199*569
232	54055=5*19*569	283	80371=179*449	337	113905=5*11*19*109
234	54989=11*4999	284	80939=29*2791	338	114581=149*769
235	55459=31*1789	286	82081=79*1039	340	115939=269*431
237	56405=5*29*389	287	82655=5*61*271	341	116621=139*839
238	56881=11*5171	289	83809=11*19*401	342	117305=5*29*809
239	57359=41*1399	291	84971=31*2741	344	118679=11*10789
242	58805=5*19*619	292	85555=5*71*241	345	119369=79*1511
243	59291=211*281	293	86141=11*41*191	346	120061=19*71*89
245	60269=11*5479	295	87319=29*3011	347	120755=5*24151
247	61255=5*12251	297	88505=5*31*571	348	121451=11*61*181
249	62249=11*5659	299	89699=19*4721	352	124255=5*24851
250	62749=131*479	300	90299=11*8209	353	124961=29*31*139
251	63251=19*3329	302	91505=5*18301	355	126379=11*11489
252	63755=5*41*311	304	92719=11*8429	356	127091=19*6689
253	64261=179*359	307	94555=5*18911	357	127805=5*25561

表 21 $t^2 + t - 1$ が素数でない 500 以下の t part3

t	$t^2 + t - 1$	t	$t^2 + t - 1$	t	$t^2 + t - 1$
359	129239=11*31*379	412	170155=5*34031	465	216689=11*19699
362	131405=5*41*641	413	170981=19*8999	466	217621=269*809
363	132131=71*1861	414	171809=11*15619	467	218555=5*43711
365	133589=19*79*89	415	172639=31*5569	469	220429=11*29*691
366	134321=11*12211	416	173471=41*4231	470	221369=19*61*191
367	135055=5*27011	417	174305=5*71*491	472	223255=5*44651
368	135791=251*541	421	177661=11*31*521	476	227051=11*20641
369	136529=311*439	422	178505=5*19*1879	477	228005=5*31*1471
370	137269=11*12479	424	180199=79*2281	479	229919=19*12101
371	138011=29*4759	425	181049=11*109*151	480	230879=11*139*151
372	138755=5*27751	426	181901=101*1801	482	232805=5*101*461
375	140999=19*41*181	427	182755=5*36551	483	233771=31*7541
376	141751=229*619	429	184469=29*6361	484	234739=191*1229
377	142505=5*11*2591	430	185329=241*769	485	235709=41*5749
379	144019=59*2441	432	187055=5*11*19*179	487	237655=5*11*29*149
381	145541=11*101*131	434	188789=71*2659	488	238631=71*3361
382	146305=5*29*1009	435	189659=89*2131	489	239609=19*12611
383	147071=61*2411	436	190531=11*17321	491	241571=11*21961
384	147839=19*31*251	437	191405=5*38281	492	242555=5*139*349
387	150155=5*59*509	438	192281=59*3259	493	243541=239*1019
388	150931=11*13721	439	193159=419*461	497	247505=5*59*839
389	151709=211*719	440	194039=29*6691	498	248501=11*19*29*41
390	152489=31*4919	441	194921=19*10259		
392	154055=5*11*2801	442	195805=5*39161		
394	155629=19*8191	443	196691=11*17881		
397	158005=5*31601	444	197579=41*61*79		
398	158801=379*419	446	199361=31*59*109		
399	159599 = 11 ² * 1319	447	200255 = 5 * 11 ² * 331		
400	160399=29*5531	451	203851=19*10729		
402	162005=5*32401	452	204755=5*31*1321		
403	162811 = 11 * 19 ² * 41	454	206569=11*89*211		
404	163619=131*1249	457	209305=5*41*1021		
406	165241=149*1109	458	210221=11*29*659		
407	166055=5*33211	459	211139=199*1061		
409	167689=61*2749	460	212059=19*11161		
410	168509=11*15319	462	213905=5*179*239		
411	169331=29*5839	464	215759=359*601		

4 考察と推測

4.1 考察

・ $p = 109$ のとき、周期 1 の軌道が 109 個存在する。

表 3~表 6 を見れば分かるとおり、ほとんどの p について類方程式の末項は 1×1 である。これは『周期 1 の軌道は 1 個 ($[[0,0]]$) のみ存在する』ということである。

しかし表 5 にあるように、 $p = 109$ のときの末項は 1×109 である。これはすなわち「周期 1 の軌道が 109 個存在する」ということを意味しており、実際にその 109 個の軌道は次ページの表 22 に補足としてまとめている。

『証明』

$$10 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} 10a_2 \equiv v_1 \pmod{p} \\ 10(a_1 + a_2) \equiv v_2 \pmod{p} \end{cases}$$

ここで周期 1 とすると、 $v_1 = a_1, v_2 = a_2$ だから、

$$\begin{cases} 10a_2 \equiv a_1 \pmod{p} \cdots (1) \\ 10(a_1 + a_2) \equiv a_2 \pmod{p} \cdots (2) \end{cases}$$
$$\therefore 10(10a_2 + a_2) \equiv a_2 \pmod{p}$$
$$\therefore 109a_2 \equiv 0 \pmod{p} \cdots (3)'$$

109 と p は素数で、 $0 \leq a_2 < p = 109$ だから、 $p \neq 109$ とすると (3)' が成立するのは $a_2 = 0$ のときのみである。

そして $p = 109$ のときは blue(3)' は常に成立し、 a_2 は $0 \leq a_2 < p = 109$ の範囲で自由にとれる。

その各々の a_2 に対して a_1 は (2) によって唯一つに定まるため、(2) と (3) を満たす $[a_1, a_2]$ は 109 個存在する。

よって $p = 109$ のときのみ、周期 1 の軌道は 109 個存在する。

(証明終)

$p = 109$ のときのみ周期 1 の軌道が複数存在するのは、観察前に $t = 10$ としたためである。
 t をそのまま変数として考えると、(3)' は

$$(t^2 + t - 1)a_2 \equiv 0 \pmod{p}$$

となる。

よって以下のことが言える。

$t^2 + t - 1$ を素因数分解する。
 その素因数が p のとき、周期 1 の軌道は p 個存在する。

表 22 (補足) $P=109$ のときの周期 1 の軌道

<p>[[0,0],[[1,11],[[2,2],[[3,33],[[4,44],[[5,55],[[6,66],[[7,77],[[8,88],[[9,99]] [[10,1],[[11,12],[[12,23],[[13,34],[[14,45],[[15,56],[[16,67],[[17,78],[[18,89],[[19,100]] [[20,2],[[21,13],[[22,24],[[23,35],[[24,46],[[25,57],[[26,68],[[27,79],[[28,90],[[29,101]] [[30,3],[[31,14],[[32,25],[[33,36],[[34,47],[[35,58],[[36,69],[[37,80],[[38,91],[[39,102]] [[40,4],[[41,15],[[42,26],[[43,37],[[44,48],[[45,59],[[46,70],[[47,81],[[48,92],[[49,103]] [[50,5],[[51,16],[[52,27],[[53,38],[[54,49],[[55,60],[[56,71],[[57,82],[[58,93],[[59,104]] [[60,6],[[61,17],[[62,28],[[63,39],[[64,50],[[65,61],[[66,72],[[67,83],[[68,94],[[69,105]] [[70,7],[[71,18],[[72,29],[[73,40],[[74,51],[[75,62],[[76,73],[[77,84],[[78,95],[[79,106]] [[80,8],[[81,19],[[82,30],[[83,41],[[84,52],[[85,63],[[86,74],[[87,85],[[88,96],[[89,107]] [[90,9],[[91,20],[[92,31],[[93,42],[[94,53],[[95,64],[[96,75],[[97,86],[[98,97],[[99,108]] [[100,10],[[101,21],[[102,32],[[103,43],[[104,54],[[105,65],[[106,76],[[107,87],[[108,98]]</p>

4.2 推測

軌道の数を M 、最大周期を N とする。

$p < 500$ について以下のことが成り立つことが分かった。

($x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{P}$ の解の個数が 0 のとき)

- $M < N$
- $p - 1 \not\equiv 0 \pmod{N}$
- $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{N}$
- $M = \frac{p^2 - 1}{N} + 1$

($x^2 - x - 1 \equiv 0 \pmod{P}$ の解の個数が 2 のとき)

- $M > N$
- $p - 1 \equiv 0 \pmod{N}$
- $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{N}$

5 感想

$t = 10$ を掛けたことが、本来の目的と違うところで発見をもたらしたことに驚きました。最初に $(t^2 + t - 1)a_2 \equiv 0 \pmod{p}$ を見つけた時は「ここでも $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式が出た」と内心喜んだのですが、よく見ると符号が違うことに気づいてぬか喜びさせられました…

起動の数と最大周期と類方程式を求めるプログラムが p が大きくなる毎にどんどん重くなっていったため、 $p < 500$ までの観察で終わっていますが、一応それなりの形になったので良かったです。他にこの研究をやりたい人がいれば、500 以上の p についての観察、 t の値の変更、私が推測したことの証明、新たな法則の発見などの課題があると思います。

1 年間有意義に研究できてよかったです、ありがとうございました。