分数の循環節の三分割和と四分割和の研究

山本詩織
学習院大学理学部数学科

2010 年 12 月 2 日

目 次

1　目的

初めに次のような例について考える。$\frac{1}{7}$ を小数展開すると、

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

であり、循環節は [142857] となる。

この節を二分割し足し合わせると、$[142] + [857] = [999]$ となる。このように一般に素数 p について分数 $\frac{1}{p}$ を小数展開し、循環節の長さが偶数の時、循環節を二分割し和を求めると 9 が並ぶ。

このように $\frac{1}{b}$ を少数に展開したときの循環節の長さが N の倍数ならば循環節を N 個に分け、それらについて桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数を N 分割和と呼ぶこととする。

今回は、b を 200 以下の素数とし、$\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$ を小数展開したときの三分割和と四分割和の性質について研究する。

2　方法

swi-prolog を用いる。

エラトスの篩で、200 以下の素数を表示させる。

```
/**1.素数の列**/
:-dynamic cd/1.
as_c(J):- ifthen(\+(cd(J)),asserta(cd(J))).

eratos(Up):- write(2),nl,

        for_step(3 =< Up,I,2),
    \+(cd(I)),
    write(I),
    write(','),
    From is I*3,
    Step is 2*I,
    for_step(From =< Up,J,Step),
    as_c(J),
    fail.
eratos(Up).

ifthen(P,Q) :- P -> Q.
ifthenelse(P,Q,R):- P-> Q;R.



j(A/B):- A<B,j_aux([A/B,10],A,0).
```

```
/**2. for_step**/
for_step(I =< J,I,Step):- I =< J.
for_step(I =< J,K,Step):- I =< J,T1 is I+Step,
for_step(T1 =< J,K,Step).
```

１で出した素数をリストとし、primebox と名付けておく。

```
primebox([7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,
107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199]).
```

$\frac{A}{B}$ を $A = B * Q + R$ の形になおす。

```
/**3. 商と余り**/
res_q(A = B*Q + R):-Q is floor(A/B),R is A - B*Q.
```

```
/**4. 最大公約数**/
gcd(A=(A,0)):-!.
gcd(D=(A,B)):-B1 is A mod B,A1=B,
    gcd(D=(A1,B1)).
```

```
/**5. for **/
for(I=<J,I):-I=<J.
for(I=<J,K):-I=<J,
    I1 is I+1,for(I1=<J,K).
```

```
/**6. リストの結合と分離**/
append0(Z=[]+Z).

append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z= X+Y).
```

```
/**7.循環節をまとめる**/
j(A/B):- A<B, j_aux([A/B,10],A,0).

     /*A,B,G をまとめてくくる*/
j_aux([A/B,G],A,R):-R>0. /**stop**/
j_aux(Const,A0,R):-

    Const=[A/B,G],/**toridasu**/
    A1 is A0 * G,
    res_q(A1 = B*Q +R1),
    write(Q),tab(1),
     j_aux(Const,R1,R1).



/**8.$\frac{A}{B}$を G 進数で循環節に直したときのリストと長さ**/
jl(A,B,G,List,SS):-
    1<B,jl_aux([A/B,G],A,0,[],List),length(List,SS),!.


jl_aux([A/B,G],A,R,L,L):-R>0,!.


jl_aux(Const,A0,R,L,W):-
        Const = [A/B,G],
    A1 is A0 *G,
    res_q(A1 = B*Q + R1),
    append0(L1 = L +[Q]),
    jl_aux(Const,R1,R1,L1,W).
```

```
/** 9. リストの三分割和と四分割和**/
left(A=[]+A,0):-!.
left(A=B+C,N):-N>0,N1 is N-1,
    left(A=B1+[X|C],N1),
    append0(B=B1+[X]),!.

sanbunkatsu(L=A+B+C):-length(L,N),N1 is N//3,
    left(L=A+D,N1),
    left(D=B+C,N1).

yonbunkatsu(L=A+B+C+D):-length(L,N),N1 is N/4,
    left(L=A+E,N1),
    left(E=B+F,N1),
    left(F=C+D,N1).


/**10. G 進数を 10 進数で示す**/
g_ten(N,[N],G):-N<G.
g_ten(X,L,G):-append0(L = N + [R]),
    g_ten(Y,N,G),
    X is Y * G + R.


/**11. 10 進数を G 進数で表し、リストで表記する。**/
ten_g(N,[N],G):- N<G.
ten_g(N,L,G):-N1 is N//G,R1 is N mod G,
    ten_g(N1,L1,G),
    append0(L=L1+[R1]).


/**12. 分割和**/
g_sum(A=B+C,G):- g_ten(X,B,G),
    g_ten(Y,C,G),
    Z is X + Y,
    ten_g(Z,A,G),!.
```

/**13.$\frac{A}{B}$、G 進数の小数展開における循環節の長さが３の倍数のときの三分割和**/

```
san(A,B,G,R):-jl(A,B,G,L,SS),write(L),
    gcd(D2=(3,SS)),
    (D2==3 -> sanbunkatsu(L=X+Y+Z),
    g_sum(Q=X+Y,G),g_sum(R=Q+Z,G)),write(R),nl.
```

/** 14.$\frac{A}{B}$、G 進数の小数展開における循環節の長さが４の倍数のときの四分割和**/

```
yon(A,B,G,S):-jl(A,B,G,L,SS),
    write(L),
    gcd(D2=(4,SS)),
    (D2==4 -> yonbunkatsu(L=W+X+Y+Z),
    g_sum(Q=W+X,G),g_sum(R=Q+Y,G),g_sum(S=R+Z,G)),write(S),nl.
```

/**15. 分子を１に固定したとき、G 進数の小数展開における循環節の長さが三分割、四分割それぞれできたときの B の値をそれぞれリストにする**/

```
primeboxy([17,29,61,73,89,97,101,109,113,137,149,181,193]).
primeboxs([7,13,19,23,31,43,61,67,97,109,127,151,157,163,181,193,199]).
```

/**16.B をそれぞれ入れたときに A に１から B-1 をいれたときの三分割和、四分割和を表記する。**/

```
rekekkay(G,B):- B1 is B-1,
    for(1=<B1,A),
    write(A),nl,
    yon(A,B,G,S),fail.
rekekkay(G,B):- nl.
```

```
rekekkas(G,B):- B1 is B-1,
    for(1=<B1,A),
    write(A),nl,
    san(A,B,G,S),fail.
rekekkas(G,B):- nl.
```

```
/**17. それぞれBが200までの素数の場合、三分割和、四分割和の結果を表記する**/
kekkay(G):- primeboxy(L),
    member(B,L),nl,
    write(B),nl,
    rekekkay(G,B),
    read(X),fail.
kekkay(G):- nl.



kekkas(G):- primeboxs(L),
    member(B,L),nl,
    write(B),nl,
    rekekkas(G,B),
    read(X),fail.
kekkas(G):- nl.
```

3 結果

$\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$ を小数展開したとき循環節の長さが 3 の倍数の場合の三分割和の結果を b が小さい方から順に表にまとめる。

表 1: $b = 7$ における三分割和

a	10 進展開での三分割和	結果 *
1	[9, 9]	1
2	[9, 9]	1
3	[1, 9, 8]	2
4	[9, 9]	1
5	[1, 9, 8]	2
6	[1, 9, 8]	2

表 2: $b = 13$ における三分割和

a	10 進展開での三分割和	結果 *
1	[9, 9]	1
2	[9, 9]	1
3	[9, 9]	1
4	[1, 9, 8]	2
5	[9, 9]	1
6	[9, 9]	1
7	[1, 9, 8]	2
8	[1, 9, 8]	2
9	[9, 9]	1
10	[1, 9, 8]	2
11	[1, 9, 8]	2
12	[1, 9, 8]	2

表 3: $b = 19$ における三分割和

a	10 進展開での三分割和	結果 *
1	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
2	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
3	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
4	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
5	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
6	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
7	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
8	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
9	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
10	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
11	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
12	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
13	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
14	[9, 9, 9, 9, 9, 9]	1
15	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
16	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
17	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
18	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2

表 4: $b = 31$ における三分割和

a	10 進展開での三分割和	結果 *
1	[9, 9, 9, 9, 9]	1
2	[9, 9, 9, 9, 9]	1
3	[9, 9, 9, 9, 9]	1
4	[9, 9, 9, 9, 9]	1
5	[9, 9, 9, 9, 9]	1
6	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
7	[9, 9, 9, 9, 9]	1
8	[9, 9, 9, 9, 9]	1
9	[9, 9, 9, 9, 9]	1
10	[9, 9, 9, 9, 9]	1
11	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
12	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
13	[9, 9, 9, 9, 9]	1
14	[9, 9, 9, 9, 9]	1
15	[9, 9, 9, 9, 9]	1
16	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
17	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
18	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
19	[9, 9, 9, 9, 9]	1
20	[9, 9, 9, 9, 9]	1
21	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
22	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
23	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
24	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
25	[9, 9, 9, 9, 9]	1
26	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
27	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
28	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
29	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2
30	[1, 9, 9, 9, 9, 8]	2

次に $\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$ を小数展開したとき循環節の長さが 4 の倍数の場合の四分割和の結果を p が小さい方から順に表にまとめる。

表 5: $b = 17$ における四分割和

a	10 進展開での四分割和
1	[1, 9, 9, 9, 8]
2	[1, 9, 9, 9, 8]
3	[1, 9, 9, 9, 8]
4	[1, 9, 9, 9, 8]
5	[1, 9, 9, 9, 8]
6	[1, 9, 9, 9, 8]
7	[1, 9, 9, 9, 8]
8	[1, 9, 9, 9, 8]
9	[1, 9, 9, 9, 8]
10	[1, 9, 9, 9, 8]
11	[1, 9, 9, 9, 8]
12	[1, 9, 9, 9, 8]
13	[1, 9, 9, 9, 8]
14	[1, 9, 9, 9, 8]
15	[1, 9, 9, 9, 8]
16	[1, 9, 9, 9, 8]

表 6: $b = 29$ における四分割和

a	10 進展開での四分割和
1	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
2	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
3	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
4	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
5	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
6	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
7	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
8	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
9	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
10	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
11	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
12	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
13	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
14	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
15	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
16	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
17	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
18	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
19	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
20	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
21	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
22	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
23	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
24	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
25	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
26	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
27	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
28	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]

表 7: $b = 61$ における四分割和

a	10 進展開での四分割和
1	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
2	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
3	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
4	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
5	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
6	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
7	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
8	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
9	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
10	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
11	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
12	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
13	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
14	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
15	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
16	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
17	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
18	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
19	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
20	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
21	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
22	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
23	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
24	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
25	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
26	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
27	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
28	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
29	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
30	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
31	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
32	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
33	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
34	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
35	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
36	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
37	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
38	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
39	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]

40	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
41	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
42	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
43	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
44	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
45	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
46	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
47	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
48	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
49	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
50	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
51	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
52	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
53	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
54	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
55	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
56	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
57	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
58	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
59	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
60	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]

表 1〜4 より、$\frac{a}{p}$, $1 \leq a < p$ を小数展開したとき循環節の長さが 3 の倍数の場合の三分割和は性質ごとに

① 9 が並ぶ場合 $(10^n - 1)$: 表右側、結果 * の 1

② 9 が並んだ数の 2 倍 $((10^n - 1) \times 2)$: 表右側、結果 * の 2

のふたつに場合分けすることが出来る。

また、$\frac{a}{p}$ の結果が①だった場合、$\frac{p-a}{p}$ の結果は②になると予想できる。これは後ほど考察する。

そして、表 5〜7 より、$\frac{a}{p}$, $1 \leq a < p$ を小数展開したとき循環節の長さが 4 の倍数の場合の四分割和は 9 が並んだ数の 2 倍 $((10^n - 1) \times 2)$ となることがわかる。

4 考察

【四分割和】　$\frac{a}{b}$ を g 進展開する。(b は素数、$1 \leq a < b$、g は b で割れない)
ga を b で割って商を q、余りを r_1 とすると、

$$ga = q_1 b + r_1$$

$$gr_1 = q_2 b + r_2$$

$$\vdots$$

循環節の長さを n とすると

$$g^n \equiv 1 \bmod b$$

$n = 4m$ のとき
$g^{4m} - 1 \equiv 0 \bmod b$ より、b は素数であるから、

$$1 + g^m + g^{2m} + g^{3m} \equiv 0 \qquad \bmod b$$

$$gr_j = q_{j+1} b + r_{j+1}$$

$$gr_{j+m} = q_{j+m+1} b + r_{j+m+1}$$

$$gr_{j+2m} = q_{j+2m+1} b + r_{j+2m+1}$$

$$gr_{j+3m} = q_{j+3m+1} b + r_{j+3m+1}$$

ここで、

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} + r_{j+3m}$$

$$Q_j = q_{j+m} + q_{j+2m} + q_{j+3m}$$

として辺々足し合わせると、$gR_j = bQ_{j+1} + R_{j+1}$ となる。

それぞれ
$j=0$ のとき

$$gR_0 = bQ_1 + R_1$$

$j=1$ のとき

$$gR_1 = bQ_2 + R_2$$

$j=2$ のとき

$$gR_2 = bQ_3 + R_3$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$j=m-1$ のとき

$$gR_{m-1} = bQ_m + R_m$$

となる。

$R_m = r_m + r_{2m} + r_{3m} + r_{4m}$,$n=4m$ なので、

$$r_{4m} = ag^{4m}$$

$$r_{4m} = a$$

$$\therefore r_{4m} = r_0 = a$$

$$\begin{array}{rcc} g^m R_0 & = & bg^{m-1}Q_1 + g^{m-1}R_1 \\ \vdots & & \vdots \\ g^3 R_{m-3} & = & bg^2 Q_{m-2} + g^2 R_{m-2} \\ g^2 R_{m-2} & = & bgQ_{m-1} + gR_{m-1} \\ +) \quad gR_{m-1} & = & bQ_m + g^2 R_m \\ \hline g^m R_0 & = & b(g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) + R_0 \end{array}$$

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) \quad \cdots (*)$$

↑右辺は $< Q_1, \cdots, Q_m >_g$ となり、今回は 10 進法を用いているため、結果が得られる。つまり、左辺が $(10^n - 1) \times 2$ になることが言えればよい。

ここで、

$$R_0 = r_0 + r_m + r_{2m} + r_{3m} \equiv a + ag^m + ag^2m^ag3m \qquad \because r_0 \equiv a \mod b$$
$$= a(1 + g^m + g^{2m} + g^{3m}) \equiv 0 \mod b$$

$\therefore R_0 \equiv 0 \mod b$

$\therefore R_0 = k_0 b$ と書ける。($R_j = k_j b$ として一般化しておく。)

$r_j < b$ より、k_j は 1or2or3.

しかし、$n = 4m = 2(2m)$ なので

$r_j = ag^j$,$n = 4m = 2 * 2m$,$2m = m'$ とすると、

$r_{j+m'} + r_j = b$,

$r_{j+2m} + r_j = b$ $(j = 0, m)$

$r_0 + r_{2m} = b$ $r_{3m} + r_m = b$ より、$k_0 = 2$ がわかる。

$(*)$ の式左辺に $R_0 = 2b$ を戻してみると、

$$(g^m - 1)\frac{2 \times b}{b}$$
$$= (g^m - 1) \times 2$$

となり、$\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$ を小数展開したとき循環節の長さが 4 の倍数の場合の四分割和は 9 が並んだ数の 2 倍 ($(10^n - 1) \times 2$) となることが言える。

【三分割和】　$\frac{a}{b}$ を g 進展開する。(b は素数、$1 \leq a < b$、g は b で割れない)
ga を b で割って商を q、余りを r_1 とすると、

$$ga = q_1 b + r_1$$

$$gr_1 = q_2 b + r_2$$

$$\vdots$$

循環節の長さを n とすると

$$g^n \equiv 1 \bmod b$$

$n = 3m$ のとき
　$g^{3m} - 1 \equiv 0 \bmod b$ より、b は素数であるから、

$$1 + g^m + g^{2m} \equiv 0 \qquad \bmod b$$

$$gr_j = q_{j+1} b + r_{j+1}$$

$$gr_{j+m} = q_{j+m+1} b + r_{j+m+1}$$

$$gr_{j+2m} = q_{j+2m+1} b + r_{j+2m+1}$$

　ここで、

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m}$$

$$Q_j = q_{j+m} + q_{j+2m}$$

　として辺々足し合わせると、$qR_j = bQ_{j+1} + R_{j+1}$ となる。それぞれ
$j = 0$ のとき

$$gR_0 = bQ_1 + R_1$$

$j = 1$ のとき

$$gR_1 = bQ_2 + R_2$$

$j = 2$ のとき

$$gR_2 = bQ_3 + R_3$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$j = m - 1$ のとき

$$gR_{m-1} = bQ_m + R_m$$

となる。
ここで　$R_m = r_m + r_{2m} + r_{3m}$,$n = 3m$ なので、　$r_{3m} = ag^{3m}$
$r_{3m} = a$

$$\therefore r_{3m} = r_0 = a$$

$$\begin{array}{ccc} g^m R_0 & = & bg^{m-1}Q_1 + g^{m-1}R_1 \\ \vdots & & \vdots \\ g^3 R_{m-3} & = & bg^2 Q_{m-2} + g^2 R_{m-2} \\ g^2 R_{m-2} & = & bgQ_{m-1} + gR_{m-1} \\ +)\quad gR_{m-1} & = & bQ_m + g^2 R_m \\ \hline g^m R_0 & = & b(g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) + R_0 \end{array}$$

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m)$$

↑つまり右辺は $< Q_1, \cdots, Q_m >_g$ となり、今回は 10 進法を用いているため、結果が得られる。
ここで、
$R_0 = r_0 + r_m + r_{2m} \equiv a + ag^m + ag^2 \because r_0 \equiv a \mod b$
$= a(1 + g^m + g^{2m}) \equiv 0 \mod b$
$R_0 \equiv 0 \mod b$
$R_0 = k_0 b$ と書ける。($R_j = k_j b$ として一般化しておく。)
$r_0 + r_{2m} = b$ $r_{3m} + r_m = b$ より、$k_0 = 2$ がわかる。
$r_j < b$ より、k_j は 1or2.
相補性定理
$R_j + R_{j'} = 3b$

$a = r_j$,$b - a = r_{j'}$　として　j,j' に相補性があるとする。

$r_j + r_{j'} \equiv 0 \mod b$
$r_{j+m} + r_{j'+m} \equiv (r_j + r_{j'})g^m \equiv 0 \mod b$
$r_{j+2m} + r_{j'+2m} \equiv 0 \mod b$

$r_j + r_{j'} = b$
$r_{j+m} + r_{j'+m} = b$
$r_{j+2m} + r_{j'+2m} = b$
より、$R_j + R_{j'} = 3b$

$R_j = r_j + r_{j+m} r_{j+2m}$
$r_j = 1 \Rightarrow R_j = b$
$r_j \equiv g^m \Rightarrow R_j = b$
$r_j \equiv g^{2m} \Rightarrow R_j = b$

$R_j + R_{j'} = 3b$ から、
$R_j = b$ なら $R_{j'} = 2b$
$R_j = 2b$ なら $R_{j'} = b$ がわかる。

5　今後の課題

今回、三分割和について、相補性については見つけることが出来たが、その順序の規則性などについては言及出来ていない。
その点など、まだまだ研究の余地はあったと思う。

6　感想

prolog や、tex の使い方もわからず、おまけに基本的な数学知識も忘れてしまっていた私を根気よく指導して下さった飯高先生には大変お世話になりました。
はじめは文章を打ち込むのにも決まりがあることに驚きましたが、エラーが出ずに出来たときや、思い通りに動いてくれたときなど、喜びも大きかったです。
また、男の子ばかりで当初不安でしたが、暖かく受け入れてくれた飯高ゼミのみんなにも感謝しています。
今後の課題にも書いたように、掘り下げればもっと楽しむことが出来たかもしれないと思うと少し残念な気持ちです。今年、体調不良が続いてしまい、欠席が多くなってしまったのも申し訳なく思います。
これで大学生活も一区切りと思うと不思議な気分ですが、今回、やったことを今後生かしていきたいです。