分数の循環節の三分割和と四分割和の研究

学習院大学理学部数学科
山本詩織

$\frac{1}{7}$ を小数展開すると、

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

→循環節は$[142857]$

二分割し足すと、$[142] + [857] = [999]$

一般に素数pについて分数$\frac{1}{p}$を小数展開し、循環節の長さが偶数の時、循環節を二分割し和を求めると 9 が並ぶ。

$\frac{a}{b}$を小数に展開したときの循環節の長さがNの倍数ならば循環節をN個に分け、それらについて桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数をN分割和と呼ぶこととする。

★☆今回の目的☆★

$\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$を小数展開し、bを200以下の素数としたときの三分割和と四分割和の性質を研究する。

☆結果☆

$\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$を小数展開したとき循環節の長さが 3 の倍数の場合の三分割和の結果をbが小さい方から順に表にまとめる。

TABLE 1. $b = 7$における三分割和

a	10進展開での三分割和	結果*
1	[9, 9]	1
2	[9, 9]	1
3	[1, 9, 8]	2
4	[9, 9]	1
5	[1, 9, 8]	2
6	[1, 9, 8]	2

Table 2. $b = 13$ における三分割和

a	10進展開での三分割和	結果*
1	[9, 9]	1
2	[9, 9]	1
3	[9, 9]	1
4	[1, 9, 8]	2
5	[9, 9]	1
6	[9, 9]	1
7	[1, 9, 8]	2
8	[1, 9, 8]	2
9	[9, 9]	1
10	[1, 9, 8]	2
11	[1, 9, 8]	2
12	[1, 9, 8]	2

三分割和は性質ごとに
①9が並ぶ場合(10^n-1)
②9が並んだ数の２倍$((10^n-1)\times 2)$
のふたつに場合分けすることが出来る。

また、$\frac{a}{b}$の結果が①だった場合、

$\frac{b-a}{b}$の結果は②になると予想できる。→相補性

次に$\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$を小数展開したとき循環節の長さが４の倍数の場合の四分割和の結果をbが小さい方から順に表にまとめる。

Table 3. $b = 17$ における四分割和

a	10進展開での四分割和	a	10進展開での四分割和
1	[1, 9, 9, 9, 8]	9	[1, 9, 9, 9, 8]
2	[1, 9, 9, 9, 8]	10	[1, 9, 9, 9, 8]
3	[1, 9, 9, 9, 8]	11	[1, 9, 9, 9, 8]
4	[1, 9, 9, 9, 8]	12	[1, 9, 9, 9, 8]
5	[1, 9, 9, 9, 8]	13	[1, 9, 9, 9, 8]
6	[1, 9, 9, 9, 8]	14	[1, 9, 9, 9, 8]
7	[1, 9, 9, 9, 8]	15	[1, 9, 9, 9, 8]
8	[1, 9, 9, 9, 8]	16	[1, 9, 9, 9, 8]

Table 4. $b = 29$ における四分割和

a	10進展開での四分割和	a	10進展開での四分割和
1	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	15	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
2	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	16	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
3	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	17	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
4	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	18	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
5	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	19	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
6	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	20	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
7	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	21	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
8	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	22	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
9	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	23	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
10	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	24	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
11	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	25	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
12	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	26	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
13	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	27	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]
14	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	28	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]

四分割和は
9が並んだ数の2倍$((10^n - 1) \times 2)$となることがわかる。

★考察★

【四分割和】

$\frac{a}{b}$をg進展開する。(bは素数、$1 \leq a < b$、gはbで割れない)

gaをbで割って商をq、余りをr_1とすると、

$$ga = q_1 b + r_1$$
$$gr_1 = q_2 b + r_2$$
$$\vdots$$

循環節の長さをnとすると

$$g^n \equiv 1 \bmod b$$

$n = 4m$のとき　　$g^{4m} - 1 \equiv 0 \bmod b$より、$b$は素数であるから、

$$1 + g^m + g^{2m} + g^{3m} \equiv 0 \qquad \bmod b$$

を導くことが出来る。

$$gr_j = q_{j+1}b + r_{j+1} \cdots (*)$$

$$gr_{j+m} = q_{j+m+1}b + r_{j+m+1} \cdots (**)$$

$$gr_{j+2m} = q_{j+2m+1}b + r_{j+2m+1} \cdots (***)$$

$$gr_{j+3m} = q_{j+3m+1}b + r_{j+3m+1} \cdots (****)$$

ここで、

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} + r_{j+3m}$$

$$Q_j = q_{j+m} + q_{j+2m} + q_{j+3m}$$

として(∗)〜(∗∗∗∗)まで辺々足し合わせると、

$$gR_j = bQ_{j+1} + R_{j+1}$$

となる。

それぞれ$j=0$のとき

$$gR_0 = bQ_1 + R_1$$

$j=1$のとき

$$gR_1 = bQ_2 + R_2$$

$j=2$のとき

$$gR_2 = bQ_3 + R_3$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$j=m-1$のとき

$$gR_{m-1} = bQ_m + R_m$$

となる。

ここで

$R_m = r_m + r_{2m} + r_{3m} + r_{4m}, n = 4m$なので、

$$r_{4m} = ag^{4m}$$

$$R_m = a$$

$\because r_{4m} = r_0 = a \leftarrow \quad n = 4m$で$4m$周期なため、$a$に戻る。

$$\begin{array}{rcl}
g^m R_0 & = & bg^{m-1}Q_1 + g^{m-1}R_1 \\
\vdots & & \vdots \\
g^3 R_{m-3} & = & bg^2 Q_{m-2} + g^2 R_{m-2} \\
g^2 R_{m-2} & = & bg Q_{m-1} + g R_{m-1} \\
+)\quad g R_{m-1} & = & bQ_m + {\color{blue}R_m} \\
\hline
g^m R_0 & = & b(g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) + {\color{blue}R_0}
\end{array}$$

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m)$$

右辺$=< Q_1, \cdots, Q_m >_g$となる。今回は10進法を用いているため$g = 10$より、結果が得られる。

ここで、

$$\begin{aligned}R_0 &= r_0 + r_m + r_{2m} + r_{3m}\\ &\equiv a + ag^m + ag^2m^ag3m \qquad \because r_0 \equiv a \mod b\\ &= a(1 + g^m + g^{2m} + g^{3m}) \equiv 0 \mod b\end{aligned}$$

$\therefore R_0 \equiv 0 \mod b$

$\therefore R_0 = k_0 b$と書ける。($R_j = k_j b$として一般化しておく。)

$r_j < b$より、k_jは1or2or3.

しかし、$n = 4m = 2(2m)$なので

$r_j = ag^j$,$n = 4m = 2 * 2m$,$2m = m'$とすると、

$r_{j+m'} + r_j = b$,

$r_{j+2m} + r_j = b \ (j = 0, m)$

$r_0 + r_{2m} = b \ r_{3m} + r_m = b$より、$k_0 = 2$がわかる。

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m)$$

の式の左辺に$R_0 = 2b$を戻してみると、

$$(g^m - 1)\frac{2 \times b}{b}$$
$$= (g^m - 1) \times 2$$

となり、$\frac{a}{b}, 1 \leq a < b$を小数展開したとき循環節の長さが４の倍数の場合の四分割和は9が並んだ数の２倍($(10^n - 1) \times 2$)となることが言える。

【三分割和】 $n=3m$ のとき

$$1+g^m+g^{2m}\equiv 0 \mod b$$

$$gr_j = q_{j+1}b + r_{j+1}$$

$$gr_{j+m} = q_{j+m+1}b + r_{j+m+1}$$

$$gr_{j+2m} = q_{j+2m+1}b + r_{j+2m+1}$$

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m}$$

$$Q_j = q_{j+m} + q_{j+2m}$$

として辺々足し合わせると、$qR_j = bQ_{j+1} + R_{j+1}$ となる。

$j=0$のとき

$$gR_0 = bQ_1 + R_1$$

$j=1$のとき

$$gR_1 = bQ_2 + R_2$$

$j=2$のとき

$$gR_2 = bQ_3 + R_3$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$j=m-1$のとき

$$gR_{m-1} = bQ_m + R_m$$

となる。ここで　$R_m = r_m + r_{2m} + r_{3m}, n = 3m$ なので、

$r_{3m} = ag^{3m}$

$$R_m = a$$

$\therefore r_{3m} = r_0 = a$

$$
\begin{array}{rcl}
g^m R_0 & = & bg^{m-1}Q_1 + g^{m-1}R_1 \\
\vdots & & \vdots \\
g^3 R_{m-3} & = & bg^2 Q_{m-2} + g^2 R_{m-2} \\
g^2 R_{m-2} & = & bg Q_{m-1} + g R_{m-1} \\
+) \quad g R_{m-1} & = & bQ_m + g^2 R_m \\
\hline
g^m R_0 & = & b(g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) + R_0
\end{array}
$$

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m)$$

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m)$$

↑つまり右辺は$< Q_1, \cdots, Q_m >_g$となり、今回は10進法を用いているため、結果が得られる。

ここで、

$R_0 = r_0 + r_m + r_{2m} \equiv a + ag^m + ag^2 \because r_0 \equiv a \mod b$

$= a(1 + g^m + g^{2m}) \equiv 0 \mod b$

$R_0 \equiv 0 \mod b$

$R_0 = k_0 b$と書ける。($R_j = k_j b$として一般化しておく。)

$r_j < b$より、k_jは1or2.

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m)$$

の式の左辺に $R_0 = 2b$ と $R_0 = b$ を戻してみると、

$$(g^m - 1)\frac{2 \times b}{b}$$

$$= (g^m - 1) \times 2$$

$$(g^m - 1)\frac{\times b}{b}$$

$$= (g^m - 1)$$

　となり、$\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$ を小数展開したとき循環節の長さが３の倍数の場合の三分割和は9が並んだ数か、9が並んだ数の２倍($(10^n - 1) \times 2$)となることがわかる。

相補性定理

$R_j + R_{j'} = 3b$

$a = r_j$,$b - a = r_{j'}$　として　j,j'に相補性があるとする。

$$r_j + r_{j'} \equiv 0 \bmod b$$
$$r_{j+m} + r_{j'+m} \equiv (r_j + r_{j'})g^m \equiv 0 \bmod b$$
$$r_{j+2m} + r_{j'+2m} \equiv 0 \bmod b$$

$$r_j + r_{j'} = b$$
$$r_{j+m} + r_{j'+m} = b$$
$$r_{j+2m} + r_{j'+2m} = b$$

より、$R_j + R_{j'} = 3b$

$$R_j = r_j + r_{j+m} r_{j+2m}$$
$r_j = 1 \Rightarrow R_j = b$
$r_j \equiv g^m \Rightarrow R_j = b$
$r_j \equiv g^{2m} \Rightarrow R_j = b$

$R_j + R_{j'} = 3b$から、
$R_j = b$なら$R_{j'} = 2b$
$R_j = 2b$なら$R_{j'} = b$ がわかる。