ニュートン多項式

学習院大学 理学部数学科
07-043-066 山崎 朋幸

2011 年 2 月 2 日

目 次

1　目的

基本対称式とは、次の $a(n, m)$ $(1 \leq n \leq m)$ で表される対称式。

$$a(k,l) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq t \leq \\ l}} x_t & k = l \\ \displaystyle\sum_{t=1}^{l} x_t & k = 1 \\ a(k, l-1) + x_l a(k-1, l-1) & k \neq 1, k < l \end{cases}$$

ニュートン多項式とは n 乗のべき和 $(\sum_{k=1}^{m} x_k^n)$ を基本対称式で表した式のことをいい、以下 $f(n, m)$ と表す。

$$\begin{aligned} f(n,m) &= \sum_{\forall \alpha_k \in \mathbf{N}, (\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k) = n} \left(t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \prod_{j=1}^{n} a(j,m)^{\alpha_j} \right) \\ \Bigg(&= \sum_{k=1}^{m} x_k^n \Bigg) \end{aligned}$$

ここで、 $t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は $\{\alpha_l\}_{l=1}^{n}$ によって決まる定数である。

ニュートン多項式の基本対称式での表示式を求め、項の係数の法則性を調べる。

2　方針

いきなり $f(n, m)$ の表示式を求めるのは難しいので、以下の順を追って調べていく。

- $f(n, 2)$ の表示式を調べる。
- $f(n, 3)$ の表示式を調べる。
- $m = 2, 3$ の場合の結果を基に、一般の場合の $f(n, m)$ の表示式を予想し調べる。

3　準備

$f(n,2), f(n,3)$ の表示式を調べるにあたって、式を分かりやすくするためにニュートン多項式と基本対称式変数を次の様に置く。

$$f(n,2) = f(n)\ ,\ f(n,3) = g(n)$$
$$a(1,2) = a\ ,\ a(2,2) = b$$
$$a(1,3) = a\ ,\ a(2,3) = b\ ,\ a(3,3) = c$$
$$x_1 = x\ ,\ x_2 = y\ ,\ x_3 = z$$

ただし、 $a_{(1,2)}$ を表す a と $a_{(1,3)}$ を表す a は異なる式である。

まず、 $f(n), g(n)$ の漸化式を求めたい。

$f(n)$ は $0 \leq n \leq 2$ で以下の様に表される。

$$\begin{aligned} f(0) &= x^0 + y^0 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \\ f(1) &= x + y \\ &= a \\ f(2) &= x^2 + y^2 \\ &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= a \times f(1) - b \times f(0) \\ &= a^2 - 2b \end{aligned}$$

$f(n)$ は $n = k\ (k \geq 2)$ の時、次の式を満たすとする。

$$f(n) = a \times f(n-1) - b \times f(n-2) \tag{1}$$

その時、 $f(k+1)$ は次の様に表せる。

$$\begin{aligned} f(k+1) &= x^{k+1} + y^{k+1} \\ &= (x^k + y^k)(x+y) - (x^{k-1} + y^{k-1})xy \\ &= a \times f(k) - b \times f(k-1) \end{aligned}$$

よって、 $n = k+1$ でも式 (1) が成り立つ。
式 (1) は $n = 2$ の時も成り立っているので、数学的帰納法より $2 \leq n$ で $f(n)$ の漸化式である。

$g(n)$ は $0 \leq n \leq 3$ で以下の様に表される。

$$
\begin{aligned}
g(0) &= x^0 + y^0 + z^0 \\
&= 1 + 1 + 1 \\
&= 3 \\
g(1) &= x + y + z \\
&= a \\
g(2) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
&= (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) \\
&= a^2 - 2b \\
g(3) &= x^3 + y^3 + z^3 \\
&= (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) - (x + y + z)(xy + xz + yz) + 3xyz \\
&= a \times g(2) - b \times g(1) + c \times g(0) \\
&= a^3 - 3ab + 3c
\end{aligned}
$$

$g(n)$ は $n = k$ $(k \geq 3)$ の時、次の式を満たすとする。

$$
g(n) = a \times g(n-1) - b \times g(n-2) + c \times g(n-3) \tag{2}
$$

その時、 $g(k+1)$ は次の様に表せる。

$$
\begin{aligned}
g(k+1) &= x^{k+1} + y^{k+1} + z^{k+1} \\
&= (x^k + y^k + z^k)(x + y + z) - (x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1})(xy + xz + yz) + (x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2})xyz \\
&= a \times g(k) - b \times g(k-1) + c \times g(k-2)
\end{aligned}
$$

よって、 $n = k + 1$ でも式 (2) が成り立つ。
式 (2) は $n = 3$ の時も成り立っているので、数学的帰納法より $3 \leq n$ で $g(n)$ の漸化式である。

これらの漸化式を利用して、prolog より $f(n), g(n)$ の表示式を調べる。

4　prolog のプログラムと出力結果

以下のプログラムを利用する。

for 文の設定

```
/*for*/
for(I =< J,I):- I=<J.
for(I =< J,K):- I=<J,
    I1 is I+1,for(I1 =< J,K).
```

$f(n)$ の表示式を求めるプログラム

```
/*definitions of 2 variables counter*/
retract1(A):- retract(A),!.
abolish2(P,Q):- retract(cnt2(P,Q,T)),fail.
abolish2(P,Q):- !.

set2(P,Q,T):- abolish2(P,Q),asserta(cnt2(P,Q,T)).
is2(P,Q,T):- cnt2(P,Q,T).
add2(P,Q,A):- retract(cnt2(P,Q,T)),
    T1 is T+A,asserta(cnt2(P,Q,T1)).
dec2(P,Q,A):- retract(cnt2(P,Q,T)),
    T1 is T-A,asserta(cnt2(P,Q,T1)).

/*preparation of 2 variables counter*/
aset2(N,T):- A1 is N//2,
    for(0 =< A1,S1),
        S2 is N-2*S1,set2(S2,S1,T),
        fail.
aset2(N,T).

faset2(N,T):- for(1 =< N,S),
    aset2(S,T),fail.
faset2(N,T).

/*caluculation to seek next counter ver,2*/
mcf2(0):- set2(0,0,2).
mcf2(1):- mcf2(0),set2(1,0,1).
mcf2(N):- N >= 2,N1 is N-1,mcf2(N1),
    s1cf2(N),s2cf2(N).

s1cf2(N):- M is N-1,A1 is M//2,
    for(0 =< A1,S1),
```

```
        S2 is M-2*S1,
        is2(S2,S1,T),
        CS is S2+1,add2(CS,S1,T),fail.
s1cf2(N).
s2cf2(N):- M is N-2,A1 is M//2,
    for(0 =< A1,S1),
        S2 is M-2*S1,
        is2(S2,S1,T),
        CS is S1+1,dec2(S2,CS,T),fail.
s2cf2(N).

/*expression of f(n) by counter ver,2*/
mpef2(N):- faset2(N,0),mcf2(N),
    A1 is N//2,
    for(0 =< A1,S1),
        S2 is N-2*S1,
        is2(S2,S1,T),X=[S2,S1],
        ((T >= 0)->(write('+'),write(T));write(T)),
        write('*'),write(X),
        fail.
mpef2(N).

flf2(N):- for(0 =< N,A),
    write(A),write(':'),tab(2),mpef2(A),nl,fail.
flf2(N).
```

$g(n)$ の表示式を求めるプログラム

```
/*definitions of 3 variables counter*/
abolish3(P,Q,R):- retract(cnt3(P,Q,R,T)),fail.
abolish3(P,Q,R):- !.

set3(P,Q,R,T):- abolish3(P,Q,R),asserta(cnt3(P,Q,R,T)).
is3(P,Q,R,T):- cnt3(P,Q,R,T).
add3(P,Q,R,A):- retract(cnt3(P,Q,R,T)),
    T1 is T+A,asserta(cnt3(P,Q,R,T1)).
dec3(P,Q,R,A):- retract(cnt3(P,Q,R,T)),
    T1 is T-A,asserta(cnt3(P,Q,R,T1)).


/*preparation of 3 variables counter*/
aset3(N,T):- A1 is N//3,
    for(0 =< A1,S1),
```

```
        N2 is N-3*S1,A2 is N2//2,
        for(0 =< A2,S2),
            S3 is N2-2*S2,set3(S3,S2,S1,T),
            fail.
aset3(N,T).

faset3(N,T):- for(1 =< N,S),
    aset3(S,T),fail.
faset3(N,T).


/*caluculation to next counter ver,3*/
mcf3(0):- set3(0,0,0,3).
mcf3(1):- mcf3(0),set3(1,0,0,1).
mcf3(2):- mcf3(1),set3(2,0,0,1),set3(0,1,0,-2).
mcf3(N):- N >= 3,N1 is N-1,mcf3(N1),
    s1cf3(N),s2cf3(N),s3cf3(N).

s1cf3(N):- M is N-1,A1 is M//3,
    for(0 =< A1,S1),
        M2 is M-3*S1,A2 is M2//2,
        for(0 =< A2,S2),
            S3 is M2-2*S2,
            is3(S3,S2,S1,T),
            CS is S3+1,add3(CS,S2,S1,T),fail.
s1cf3(N).
s2cf3(N):- M is N-2,A1 is M//3,
    for(0 =< A1,S1),
        M2 is M-3*S1,A2 is M2//2,
        for(0 =< A2,S2),
            S3 is M2-2*S2,
            is3(S3,S2,S1,T),
            CS is S2+1,dec3(S3,CS,S1,T),fail.
s2cf3(N).
s3cf3(N):- M is N-3,A1 is M//3,
    for(0 =< A1,S1),
        M2 is M-3*S1,A2 is M2//2,
        for(0 =< A2,S2),
            S3 is M2-2*S2,
            is3(S3,S2,S1,T),
            CS is S1+1,add3(S3,S2,CS,T),fail.
s3cf3(N).
```

```
/*expression of g(n) by counter ver,3*/
mpef3(N):- faset3(N,0),mcf3(N),
    A1 is N//3,
    for(0 =< A1,S1),
        N2 is N-3*S1,A2 is N2//2,
        for(0 =< A2,S2),
            S3 is N2-2*S2,
            is3(S3,S2,S1,T),X=[S3,S2,S1],
            ((T >= 0)->(write('+'),write(T));write(T)),
            write('*'),write(X),
            fail.
mpef3(N).

cpef3(N):- faset3(N,0),mcf3(N),
    A1 is N//3,
    for(0 =< A1,S1),
        N2 is N-3*S1,A2 is N2//2,
        ((S1 > 0)->(nl,tab(7));tab(2)),
        for(0 =< A2,S2),
            S3 is N2-2*S2,
            is3(S3,S2,S1,T),X=[S3,S2,S1],
            ((T >= 0)->(write('+'),write(T));write(T)),
            write('*'),write(X),
            fail.
cpef3(N).

flf3(N):- for(0 =< N,A),
    write(A),write(':'),cpef3(A),nl,fail.
flf3(N).
```

$f(n)$ と $g(n)$ の表示式を比べるプログラム

```
/*compare 2 variables and 3*/
scf23(N):- write('n ='),write(N),nl,
    write('(a,b):'),tab(2),mpef2(N),nl,
    write('(a,b,c):'),cpef3(N).

acf23(N):- for(0 =< N,S1),
    scf23(S1),nl,nl,fail.
acf23(N).
```

表 1: $f(n), g(n)$ の $0 \leq n \leq 10$ における基本対称式での表示式

n	$f(n)$	$g(n)$
0	2	3
1	a	a
2	$a^2 - 2b$	$a^2 - 2b$
3	$a^3 - 3ab$	$a^3 - 3ab$ $+3c$
4	$a^4 - 4a^2b + 2b^2$	$a^4 - 4a^2b + 2b^2$ $+4ac$
5	$a^5 - 5a^3b + 5ab^2$	$a^5 - 5a^3b + 5ab^2$ $+5a^2c - 5bc$
6	$a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 - 2b^3$	$a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 - 2b^3$ $+6a^3c - 12abc$ $+3c^2$
7	$a^7 - 7a^5b + 14a^3b^2 - 7ab^3$	$a^7 - 7a^5b + 14a^3b^2 - 7ab^3$ $+7a^4c - 21a^2bc + 7b^2c$ $+7ac$
8	$a^8 - 8a^6b + 20a^4b^2 - 16a^2b^3 + 2b^4$	$a^8 - 8a^6b + 20a^4b^2 - 16a^2b^3 + 2b^4$ $+8a^5c - 32a^3bc + 24ab^2c$ $+12a^2c^2 - 8bc^2$
9	$a^9 - 9a^7b + 27a^5b^2 - 30a^3b^3 + 9ab^4$	$a^9 - 9a^7b + 27a^5b^2 - 30a^3b^3 + 9ab^4$ $+9a^6c - 45a^4bc + 54a^2b^2c - 9b^3c$ $+18a^3c^2 - 27abc^2$ $+3c^3$
10	$a^{10} - 10a^8b + 35a^6b^2 - 50a^4b^3 + 25a^2b^4 - 2b^5$	$a^{10} - 10a^8b + 35a^6b^2 - 50a^4b^3 + 25a^2b^4 - 2b^5$ $+10a^7c - 60a^5bc + 100a^3b^2c - 40ab^3c$ $+25a^4c^2 - 60a^2bc^2 + 15b^2c^2$ $+10ac^3$

5 $f(n,2)$ の表示式

$$f(n) = \sum_{\alpha+2\beta=n} t(\alpha,\beta)a^\alpha b^\beta$$

係数 $t(\alpha,\beta)$ を求めたい。

$f(n)$ の漸化式 (1) より、$n \geq 2$ ならば次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(n) &= a \times f(n-1) - b \times f(n-2) \\ &= \Big(\sum_{(\alpha,\beta\neq 0),\alpha+2\beta=n} (t(\alpha-1,\beta) - t(\alpha,\beta-1))a^\alpha b^\beta \Big) + s(n) \end{aligned}$$

ただし、 $s(n)$ は次の式である。

$$s(n) = \begin{cases} t(n-1,0)a^n - t(0,\frac{n}{2}-1)b^{\frac{n}{2}} & ,(n\text{:偶数}) \\ t(n-1,0)a^n & ,(n\text{:奇数}) \end{cases}$$

よって、$\alpha+2\beta \neq 0$ ならば $t(\alpha,\beta)$ は次の漸化式を持つ。

$$t(\alpha,\beta) = \begin{cases} t(\alpha-1,\beta) - t(\alpha,\beta-1) & ,(\alpha,\beta \neq 0) \\ t(\alpha-1,\beta) & ,(\beta = 0) \\ -t(\alpha,\beta-1) & ,(\alpha = 0) \end{cases}$$

次の初期値は明らか。

$$t(0,0) = 2$$
$$t(1,0) = 1$$

漸化式と初期値から、 $t(\alpha,0), t(0,\beta)$ が求まる。

$$\begin{aligned} t(\alpha,0) &= 1 \\ t(0,\beta) &= (-1)^\beta 2 \end{aligned}$$

まず、 $t(n,1)$ について考える。
定義より、 $t(n,1)$ は次の初期値と漸化式を持つ。

$$\begin{aligned} t(0,1) &= -2 \\ t(\alpha,1) &= t(\alpha-1,1) - t(\alpha,0) \ ,(\alpha \neq 0) \end{aligned}$$

$\alpha \neq 0$ の時、漸化式から次の式が導ける。

$$\begin{aligned} t(\alpha,1) &= t(\alpha-1,1) - t(\alpha,0) \\ &= t(0,1) - \sum_{1\leq k\leq\alpha} t(k,0) \end{aligned}$$

$t(0,1) = -2 \le 0, t(\alpha,0) = 1 \ge 0$ より、 $t(\alpha,1) \le 0$ がわかる。
よって、 $|t(n,1)|$ は次の式を満たす。

$$\begin{aligned} |t(\alpha,1)| &= |t(0,1) - \sum_{1\le k\le\alpha} t(k,0)| \\ &= 2 + \sum_{1\le k\le\alpha} t(k,0) \end{aligned}$$

次に、 $t(\alpha,2)$ を考える。
$t(\alpha,1)$ と同様にして、次の初期値と漸化式を持つ。

$$\begin{aligned} t(0,2) &= 2 \\ t(\alpha,2) &= t(\alpha-1,2) - t(\alpha,1)\ ,(\alpha \ne 0) \\ &= t(0,2) - \sum_{1\le k\le\alpha} t(k,1) \end{aligned}$$

$t(0,2) = 2 \ge 0, t(\alpha,1) \le 0$ より $t(\alpha,2) \ge 0$ がわかり、次の式が成り立つ。

$$t(\alpha,2) = 2 + \sum_{1\le k\le\alpha} |t(k,1)|$$

ここで、 $t(\alpha,\beta)$ $(\beta \ge 1)$ に対して次の式を仮定する。

$$\begin{aligned} |t(\alpha,\beta)| &= 2 + \sum_{1\le k\le\alpha} |t(k,\beta-1)| \\ t(\alpha,\beta) &= (-1)^\beta \Big(2 + \sum_{1\le k\le\alpha} |t(k,\beta-1)|\Big) \end{aligned}$$

$\beta = 1,2$ の時、仮定は正しい。
$\beta = i$ $(i > 2)$ で仮定が成り立つとすると、以下の計算から $\beta = i+1$ でも成り立つ。

$$\begin{aligned} t(\alpha,i+1) &= t(\alpha-1,i+1) - t(\alpha,i) \\ &= t(0,i+1) - \sum_{1\le k\le\alpha} t(k,i) \\ &= (-1)^{i+1}2 - \sum_{1\le k\le\alpha} (-1)^i(2 + \sum_{1\le l\le\alpha} |t(l,i-1)|) \\ &= (-1)^{i+1}2 - (-1)^i \sum_{11\le k\le\alpha} \Big(2 + \sum_{1\le l\le\alpha} |t(l,i-1)|\Big) \\ &= (-1)^\beta(2 + \sum_{1\le k\le\alpha} |t(k,i)|) \end{aligned}$$

数学的帰納法により仮定は正しい。

これにより、 $t(\alpha,\beta), |t(\alpha,\beta)|$ は次の式を満たす。

$$|t(n,\beta)| = \begin{cases} 2 & \alpha = 0 \\ 1 & \alpha \ne 0, \beta = 0 \\ |t(\alpha-1,\beta)| + |t(\alpha,\beta-1)| & \alpha,\beta \ne 0 \end{cases}$$

$$t(n,\beta)=(-1)^{\beta}|t(n,\beta)|$$

ここからは $|t(\alpha,\beta)|$ に着目して調査する。

$|t(\alpha,\beta)|$ の値は表 2 に様になる。
まず、 $|t(\alpha,\beta)|$ を以下の 2 つの要素に分解する。

$$|t(\alpha,\beta)|=p_{(\alpha,\beta)}+q_{(\alpha,\beta)}$$

$$p_{(\alpha,\beta)}=\begin{cases}1 & \alpha=0 \text{ or } \beta=0\\ p_{(\alpha-1,\beta)}+p_{(\alpha,\beta-1)} & \alpha,\beta\neq 0\end{cases}$$

$$q_{(\alpha,\beta)}=\begin{cases}1 & \alpha=0\\ 0 & \alpha\neq 0,\beta=0\\ q_{(\alpha-1,\beta)}+q_{(\alpha,\beta-1)} & \alpha,\beta\neq 0\end{cases}$$

表 2 の値を分解した状態で表すと表 3、 $p_{(\alpha,\beta)}$ の値は表 4 になる。
（表 2,3,4 は 24 ページ参照）

$p_{(\alpha,\beta)}$ の値は自身の定義から 2 次の格子路の最短経路の数に等しいので、次の式で表される。

$$\begin{aligned}p_{(\alpha,\beta)} &= {}_{\alpha+\beta}\mathrm{C}_{\beta}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}\end{aligned}$$

又、 $q_{(\alpha,\beta)}$ は次の様に p の式で表せる。

$$q_{(\alpha,\beta)}=\begin{cases}1 & \alpha,\beta=0\\ 0 & \alpha\neq 0,\beta=0\\ p_{(\alpha,\beta-1)} & \beta\neq 0\end{cases}$$

これにより、$|t(\alpha,\beta)|$ は $\beta\neq 0$ ならば次の式より成り立つ。

$$\begin{aligned}|t(\alpha,\beta)| &= p_{(\alpha,\beta)}+p_{(\alpha,\beta-1)}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}+\frac{(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!(\beta-1)!}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!\beta!}+\frac{\beta(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!\beta!}\\ &= \frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!\beta!}\\ &= \frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta)\alpha!\beta!}\\ &= \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}\,{}_{\alpha+\beta}\mathrm{C}_{\beta}\end{aligned}$$

$\alpha \neq 0$ であるならば、 $\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}{}_{\alpha+\beta}\mathrm{C}_{\beta}$ に $\beta = 0$ を代入する次の様になる。

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+2\times 0}{\alpha+0}{}_{\alpha+0}\mathrm{C}_0 &= \frac{\alpha}{\alpha}{}_{\alpha}\mathrm{C}_{\alpha} \\ &= 1\end{aligned}$$

よって、$\alpha, \beta \neq 0$ ならば $|t(\alpha,\beta)|$ は次の式で求められる。

$$|t(\alpha,\beta)| = \frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}{}_{\alpha+\beta}\mathrm{C}_{\beta}$$

これで係数 $t(\alpha,\beta)$ を求める式がわかった。

$$t(\alpha,\beta) = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ (-1)^{\beta}\dfrac{(\alpha+2\beta)(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta)\alpha!\beta!} & n \neq 0 \end{cases}$$

よって、 $f(n)$ の基本対称式での表示式は次の様になる。

$$f(n) = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ \displaystyle\sum_{\alpha+2\beta=n}(-1)^{\beta}\frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta)\alpha!\beta!}a^{\alpha}b^{\beta} & n \neq 0 \end{cases}$$

6 $f(n,3)$ の表示式

$$g(n) = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma=n} t(\alpha,\beta,\gamma)a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$$

係数 $t(\alpha,\beta,\gamma)$ を求めたい。

$g(n)$ の漸化式 (2) より、 $n \geq 3$ ならば次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
g(n) &= a\times g(n-1) - b\times g(n-2) + c\times g(n-3)\\
&= \Big(\sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 1,\alpha+2\beta+3\gamma=n} \big(t(\alpha-1,\beta,\gamma) - t(\alpha,\beta-1,\gamma) + t(\alpha,\beta,\gamma-1)\big)a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\Big)\\
&\quad +\Big(\sum_{\alpha,\beta\geq 1,\alpha+2\beta=n} \big(t(\alpha-1,\beta,0) - t(\alpha,\beta-1,0)\big)a^{\alpha}b^{\beta}\Big)\\
&\quad +\Big(\sum_{\alpha,\gamma\geq 1,\alpha+3\gamma=n} \big(t(\alpha-1,0,\gamma) + t(\alpha,0,\gamma-1)\big)a^{\alpha}c^{\gamma}\Big)\\
&\quad +\Big(\sum_{\beta,\gamma\geq 1,2\beta+3\gamma=n} \big(-t(0,\beta-1,\gamma)t + t(0,\beta,\gamma-1)\big)b^{\beta}c^{\gamma}\Big)\\
&\quad +t(\alpha-1,0,0)a^{n} + sb(n) + sc(n)
\end{aligned}$$

$sb(n), sc(n)$ はそれぞれ次の式で表される。

$$sb(n) = \begin{cases} -t(0,\frac{n}{2}-1,0)tb^{\frac{n}{2}} & n\equiv 0 \bmod 2\\ 0 & n\not\equiv 0 \bmod 2\end{cases}$$

$$sc(n) = \begin{cases} t(0,0,\frac{n}{3}-1)c^{\frac{n}{3}} & n\equiv 0 \bmod 3\\ 0 & n\not\equiv 0 \bmod 3\end{cases}$$

さらに、次の初期値は明らか。

$$\begin{aligned}
t(0,0,0) &= 3\\
t(1,0,0) &= 1\\
t(2,0,0) &= 1\\
t(0,1,0) &= -2
\end{aligned}$$

よって、 $t(\alpha,\beta,\gamma)$ は次の漸化式を持つ。

$$t(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases}
t(\alpha-1,\beta,\gamma) - t(\alpha,\beta-1,\gamma) + t(\alpha,\beta,\gamma-1) & \alpha,\beta,\gamma\neq 0\\
t(\alpha-1,\beta,\gamma) - t(\alpha,\beta-1,\gamma) & (\alpha,\beta\neq 0),\gamma=0\\
t(\alpha-1,\beta,\gamma) + t(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\alpha,\gamma\neq 0),\beta=0\\
-t(\alpha,\beta-1,\gamma) + t(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\beta,\gamma\neq 0),\alpha=0\\
1 & (\beta,\gamma=0),\alpha\neq 0\\
(-1)^{\beta}2 & (\alpha,\gamma=0),\beta\neq 0\\
3 & \alpha,\beta=0
\end{cases}$$

今度は、 $t(\alpha,\beta,\gamma)$ を $|t(\alpha,\beta,\gamma)|$ に置き換える。

$t(\alpha,0,\gamma)$ は漸化式より次の式で表される。

$$t(\alpha,0,\gamma)=\begin{cases} t(\alpha-1,0,\gamma)+t(\alpha,0,\gamma-1) & \alpha,\gamma\neq 0 \\ 1 & \gamma=0,\alpha\neq 0 \\ 3 & \alpha=0 \end{cases}$$

$t(\alpha,0,\gamma)\geq 0$ は明らかなので、 $|t(\alpha,0,\gamma)|=t(\alpha,0,\gamma)$ が成り立つ。
よって、$|t(\alpha,0,\gamma)|$ は次の漸化式で表せる。

$$|t(\alpha,0,\gamma)|=\begin{cases} |t(\alpha-1,0,\gamma)|+|t(\alpha,0,\gamma-1)| & \alpha,\gamma\neq 0 \\ |t(1,0,0)| & \gamma=0,\alpha\neq 0 \\ |t(0,0,0)| & \alpha=0 \end{cases}$$

$t(\alpha,1,\gamma)$ も漸化式から次の様に表せる。

$$t(\alpha,1,\gamma)=\begin{cases} t(\alpha-1,1,\gamma)-t(\alpha,0,\gamma)+t(\alpha,1,\gamma-1) & \alpha,\gamma\neq 0 \\ t(\alpha-1,1,\gamma)-t(\alpha,0,\gamma) & \alpha\neq 0,\gamma=0 \\ -t(\alpha,0,\gamma)+t(\alpha,1,\gamma-1) & \gamma\neq 0,\alpha=0 \\ -2 & \alpha,\gamma=0 \end{cases}$$

$t(\alpha,1,0),t(0,1,\gamma)$ はそれぞれ $\alpha\neq 0,\gamma\neq 0$ ならば次の様に表せる。

$$\begin{aligned} t(\alpha,1,0) &= t(\alpha-1,1,0)-t(\alpha,0,0) \\ &= t(0,1,0)+\sum_{k=1}^{\alpha}\big(-t(k,0,0)\big) \\ &= -2-\sum_{k=1}^{\alpha}t(k,0,0) \\ t(0,1,\gamma) &= -t(0,0,\gamma)+t(0,1,\gamma-1) \\ &= t(0,1,0)+\sum_{k=1}^{\gamma}\big(-t(0,0,k)\big) \\ &= -2-\sum_{k=1}^{\gamma}t(0,0,k) \end{aligned}$$

$t(\alpha,0,\gamma)\geq 0$ より、$t(\alpha,1,0),t(0,1,\gamma)\leq 0$ となる。

そして、$t(\alpha,1,1)$ $(\alpha\geq 1)$ は次の様に表せる。

$$\begin{aligned} t(\alpha,1,1) &= t(\alpha-1,1,1)-t(\alpha,0,1)+t(\alpha,1,0) \\ &= t(0,1,1)+\sum_{k=1}^{\alpha}\big(-t(k,0,1)+t(k,1,0)\big) \end{aligned}$$

$\big(t(0,1,1),t(k,1,0)\leq 0\big),t(k,0,1)\geq 0$ より、$t(\alpha,1,1)\leq 0$ となる。
又、 $t(\alpha,1,1)$ $(\alpha\geq 1)$ も同様にして $t(1,1,\gamma)\leq 0$ が示せる。

ここで、$t(\alpha,1,\gamma)\leq 0$ を予想する。

$t(k-1,1,s),t(k,1,l-1)$ の時、成り立つと仮定する。

$$t(k,1,l)=t(k-1,1,l)-t(k,0,l)+t(k,1,l)$$

$\bigl(t(k-1,1,s),t(k,1,l-1)\leq 0\bigr),t(k,0,l)\geq 0$ より $t(k,1,l)\leq 0$ が成り立つ。

数学的帰納法により $t(\alpha,1,\gamma)\leq 0$ は正しい。

よって、$|t(\alpha,1,\gamma)|=-t(\alpha,1,\gamma)$ は次の漸化式を持つ。

$$|t(\alpha,1,\gamma)|=\begin{cases}|t(\alpha-1,1,\gamma)|+|t(\alpha,0,\gamma)|+|t(\alpha,1,\gamma-1)| & \alpha,\gamma\neq 0\\ |t(\alpha-1,1,0)|+|t(\alpha,0,0)| & \alpha\neq 0,\gamma=0\\ |t(0,0,\gamma)|+|t(0,1,\gamma-1)| & \gamma\neq 0,\alpha=0\\ |t(0,1,0)| & \alpha,\gamma=0\end{cases}$$

今度は、 $|t(\alpha,\beta,\gamma)|=(-1)^{\beta}t(\alpha,\beta,\gamma)$ を予想する。

$\beta\leq k-1$ で成り立つと仮定する。
$t(\alpha,1,\gamma)$ と同様に、帰納法より $t(\alpha,k,0),t(0,k,\gamma)$ を経由して予想が正しいことを示せる。

これにより、 $|t(\alpha,\beta,\gamma)|$ は次の漸化式を持つ。

$$|t(\alpha,\beta,\gamma)|=\begin{cases}|t(\alpha-1,\beta,\gamma)|+|t(\alpha,\beta-1,\gamma)|+|t(\alpha,\beta,\gamma-1)| & \alpha,\beta,\gamma\neq 0\\ |t(\alpha-1,\beta,\gamma)|+|t(\alpha,\beta-1,\gamma)| & (\alpha,\beta\neq 0),\gamma=0\\ |t(\alpha-1,\beta,\gamma)|+|t(\alpha,\beta,\gamma-1)| & (\alpha,\gamma\neq 0),\beta=0\\ |t(\alpha,\beta-1,\gamma)|+|t(\alpha,\beta,\gamma-1)| & (\beta,\gamma\neq 0),\alpha=0\\ 1 & (\beta,\gamma=0),\alpha\neq 0\\ 2 & (\alpha,\gamma=0),\beta\neq 0\\ 3 & \alpha,\beta=0\end{cases}$$

ここからは、$|t(\alpha,\beta,\gamma)|$ について考える。
まず、$|t(\alpha,\beta,\gamma)|$ を次の 3 つの要素に分解する。

$$|t(\alpha,\beta,\gamma)|=x(\alpha,\beta,\gamma)+y(\alpha,\beta,\gamma)+z(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$x(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}x(\alpha-1,\beta,\gamma)+x(\alpha,\beta-1,\gamma)+x(\alpha,\beta,\gamma-1) & \alpha,\beta,\gamma\neq 0\\ x(\alpha-1,\beta,\gamma)+x(\alpha,\beta-1,\gamma) & (\alpha,\beta\neq 0),\gamma=0\\ x(\alpha-1,\beta,\gamma)+x(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\alpha,\gamma\neq 0),\beta=0\\ x(\alpha,\beta-1,\gamma)+x(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\beta,\gamma\neq 0),\alpha=0\\ 1 & (\beta,\gamma=0)\mathrm{or}(\alpha,\gamma=0)\mathrm{or}(\alpha,\beta=0)\end{cases}$$

$$y(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} y(\alpha-1,\beta,\gamma)+y(\alpha,\beta-1,\gamma)+y(\alpha,\beta,\gamma-1) & \alpha,\beta,\gamma\neq 0 \\ y(\alpha-1,\beta,\gamma)+y(\alpha,\beta-1,\gamma) & (\alpha,\beta\neq 0),\gamma=0 \\ y(\alpha-1,\beta,\gamma)+y(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\alpha,\gamma\neq 0),\beta=0 \\ y(\alpha,\beta-1,\gamma)+y(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\beta,\gamma\neq 0),\alpha=0 \\ 0 & (\beta,\gamma=0),\alpha\neq 0 \\ 1 & (\alpha,\beta=0)\mathrm{or}(\alpha,\gamma=0) \end{cases}$$

$$z(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} z(\alpha-1,\beta,\gamma)+z(\alpha,\beta-1,\gamma)+z(\alpha,\beta,\gamma-1) & \alpha,\beta,\gamma\neq 0 \\ z(\alpha-1,\beta,\gamma)+z(\alpha,\beta-1,\gamma) & (\alpha,\beta\neq 0),\gamma=0 \\ z(\alpha-1,\beta,\gamma)+z(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\alpha,\gamma\neq 0),\beta=0 \\ z(\alpha,\beta-1,\gamma)+z(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\beta,\gamma\neq 0),\alpha=0 \\ 0 & ((\alpha,\gamma=0),\beta\neq 0)\mathrm{or}((\beta,\gamma=0),\alpha\neq 0) \\ 1 & \alpha,\beta=0 \end{cases}$$

さらに、$y(\alpha,\beta,\gamma)$ を次の 2 要素に分解する。

$$y(\alpha,\beta,\gamma)=yb(\alpha,\beta,\gamma)+z(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$yb(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} yb(\alpha-1,\beta,\gamma)+yb(\alpha,\beta-1,\gamma)+yb(\alpha,\beta,\gamma-1) & \alpha,\beta,\gamma\neq 0 \\ yb(\alpha-1,\beta,\gamma)+yb(\alpha,\beta-1,\gamma) & (\alpha,\beta\neq 0),\gamma=0 \\ yb(\alpha-1,\beta,\gamma)+yb(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\alpha,\gamma\neq 0),\beta=0 \\ yb(\alpha,\beta-1,\gamma)+yb(\alpha,\beta,\gamma-1) & (\beta,\gamma\neq 0),\alpha=0 \\ 0 & (\beta,\gamma=0)\mathrm{or}(\alpha,\beta=0) \\ 1 & (\alpha,\gamma=0),\beta\neq 0 \end{cases}$$

$x(\alpha,\beta,\gamma)$ の値は、自身の定義から 3 次の格子路の最短経路の数に等しい。
よって、$x(\alpha,\beta,\gamma)$ は次の式より求まる。

$$x(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

$yb(\alpha,\beta,\gamma),z(\alpha,\beta,\gamma)$ は次の $x(\alpha,\beta,\gamma)$ の式で表せる。

$$yb(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} 0 & \beta=0 \\ x(\alpha,\beta-1,\gamma) & \beta\neq 0 \end{cases}$$

$$z(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} 1 & \alpha,\beta,\gamma=0 \\ 0 & \gamma=0,(\alpha+\beta)\neq 0 \\ x(\alpha,\beta,\gamma-1) & \gamma\neq 0 \end{cases}$$

したがって、 $|t(\alpha,\beta,\gamma)|$ は次の式より求まる。

$$|t(\alpha,\beta,\gamma)| = \begin{cases} \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\beta!\gamma!} + \dfrac{(\alpha+\beta-1+\gamma)!}{\alpha!(\beta-1)!\gamma!} + 2\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma-1)!}{\alpha!\beta!(\gamma-1)!} & \beta,\gamma \neq 0 \\ \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\beta!\gamma!} + 2\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma-1)!}{\alpha!\beta!(\gamma-1)!} & \beta = 0, \gamma \neq 0 \\ \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\beta!\gamma!} + \dfrac{(\alpha+\beta-1+\gamma)!}{\alpha!(\beta-1)!\gamma!} & \beta \neq 0, \gamma = 0 \\ \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\beta!\gamma!} & \alpha \neq 0, (\beta,\gamma = 0) \\ \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\beta!\gamma!} + 2 & \alpha,\beta,\gamma = 0 \end{cases}$$

各式を縮めると次の様になる。

$$|t(\alpha,\beta,\gamma)| = \begin{cases} \dfrac{(\alpha+2\beta+3\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)!}{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha!\beta!\gamma!} & \beta,\gamma \neq 0 \\ \dfrac{(\alpha+3\gamma)(\alpha+\gamma)!}{(\alpha+\gamma)\alpha!\gamma!} & \beta = 0, \gamma \neq 0 \\ \dfrac{(\alpha+2\beta)(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta)\alpha!\beta!} & \beta \neq 0, \gamma = 0 \\ 1 & \alpha \neq 0, (\beta,\gamma = 0) \\ 3 & \alpha,\beta,\gamma = 0 \end{cases}$$

次の式 $csg(\alpha,\beta,\gamma)$ を置く。

$$csg(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{(\alpha+2\beta+3\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)!}{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha!\beta!\gamma!}$$

$csg(\alpha,\beta,\gamma)$ は以下の条件を満たす。

$$\begin{aligned} csg(\alpha,0,\gamma) &= \frac{(\alpha+2*0+3\gamma)(\alpha+0+\gamma)!}{(\alpha+0+\gamma)\alpha!0!\gamma!} \\ &= \frac{(\alpha+3\gamma)(\alpha+\gamma)!}{(\alpha+\gamma)\alpha!\gamma!} \\ csg(\alpha,\beta,0) &= \frac{(\alpha+2\beta+3*0)(\alpha+\beta+0)!}{(\alpha+\beta+0)\alpha!\beta!0!} \\ &= \frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta)\alpha!\beta!} \\ csg(\alpha,0,0) &= 1 \end{aligned}$$

したがって、$\alpha,\beta,\gamma = 0$ の場合を除いて $|t(\alpha,\beta,\gamma)t| = csg(\alpha,\beta,\gamma)$ が成り立つ。

これで係数 $t(\alpha,\beta,\gamma)$ を求める式がわかった。

$$t(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 3 & \alpha,\beta,\gamma = 0 \\ (-1)^{\beta}\dfrac{(\alpha+2\beta+3\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)!}{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha!\beta!\gamma!} & \alpha+\beta+\gamma \neq 0 \end{cases}$$

よって、$g(n)$ の基本対称式での表示式は次の様になる。

$$g(n)=\begin{cases} 3 & n=0 \\ \displaystyle\sum_{\alpha+2\beta+3\gamma=n}(-1)^{\beta}\frac{n(\alpha+\beta+\gamma)!}{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha!\beta!\gamma!}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} & n\neq 0 \end{cases}$$

7　一般の $f(n,m)$ の表示式

$f(n), g(n)$ より、一般の $f(n,m)$ は以下の漸化式と表示式を持つと予想する。

$$f(n,m)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a(k,m)f(n-k,m) & n\geq m\geq 1\\ \displaystyle(-1)^{n+1}na(n,m)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,m)f(n-k,m) & m>n>1\end{cases}$$

$$f(n,m)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{(\sum_{t=1}^{m}t\alpha_t)=n}\Big(\big(\prod_{1\leq u\leq m}((-1)^{u+1})^{\alpha_u}\big)\frac{n\big((\sum_{v=1}^{m}\alpha_v)-1\big)!}{\prod_{1\leq w\leq m}\alpha_w!}\prod_{1\leq x\leq m}a(x,m)^{\alpha_x}\Big) & n\neq 0\\ m & n=0\end{cases}$$

まず、関数 $R(t,m)$ を次の様に置く。

$$R(t,m)=\prod_{k=1}^{m}(t-x_k)$$

基本対称式の定義から $R(t,m)$ は次の基本対称式の式で表せる。

$$R(t,m)=t^m-a(1,m)t^{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}a(m-1,m)t+(-1)^m a(m,m)$$

$1\leq i\leq m$ の時、 $R(x_i,m)=0$ は明らかなので x_i^m は次の式で表せる。

$$\begin{aligned}x_i^m &= a(1,m)x_i^{m-1}-a(2,m)x_i^{m-2}+\cdots+(-1)^m a(m-1,m)x_i+(-1)^{m+1}a(m,m)\\ &= \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}a(j,m)x_i^{m-j}\end{aligned}$$

よって、次の等式が $s\geq 0$ で成り立つ。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}x_i^{s+m} &= \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}a(j,m)x_i^{m-j+s}\Big)\\ f(s+m,m) &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a(k,m)f(s+m-k,m)\end{aligned}$$

この式から $f(n,m)$ の $n\geq m$ における漸化式が示される。

$$f(n,m)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a(k,m)f(n-k,m)$$

今度は、次の関数 $H(n)$ $(n\geq 2)$ を置く。

$$H(n)=(-1)^{n+1}na(n,n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,n+1)f(n-k,n+1)$$

$n=2$ で $H(n)$ は次の式を満たす。

$$\begin{aligned}
H(2) &= (-1)^3 2a(2,3)+a(1,3)f(1,3)\\
&= f(2,3)
\end{aligned}$$

基本対称式とニュートン多項式の定義から、$n>2$ で $H(n)$ は次の様に表せる。

$$\begin{aligned}
H(n) &= (-1)^{n+1}n\big(a(n,n)+x_{n+1}a(n-1,n)\big)\\
&\quad +\Big(\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k+1}\big(a(k,n)+x_{n+1}a(k-1,n)\big)\big(f(n-k,n)+x_{n+1}^{n-k}\big)\Big)\\
&\quad +(-1)^{1+1}\big(a(1,n)+x_{n+1}\big)\big(f(n-1,n)+x_{n+1}^{n-1}\big)\\
&= (-1)^{n+1}nf(0,n)a(n,n)+\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,n)f(n-k,n)\Big)\\
&\quad +\Big(\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,n)x_{n+1}^{n-k}\Big)+\Big(\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k-1,n)x_{n+1}^{n-k+1}\Big)\\
&\quad +x_{n+1}\Big(\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k-1,n)f(n-k,n)\Big)+n_{n+1}^{n}\\
&\quad +(-1)^{n+1}nx_{n+1}a(n-1,n)+a(1,n)x_{n+1}^{n-1}+x_{n+1}f(n-1,n)\\
&= f(n,n)+x_{n+1}^{n}+\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,n)x_{n+1}^{n-k}\Big)+\Big(\sum_{t=1}^{n-1}(-1)^{t}a(t,n)x_{n+1}^{n-t}\Big)\\
&\quad +(-1)^{n+1}(n-1)x_{n+1}a(n-1,n)+x_{n+1}(\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k-1,n)f(n-k,n))+x_{n+1}f(n-1,n)\\
&= f(n,n+1)+x_{n+1}\big(f(n-1,n)-H(n-1)\big)\\
&= f(n,n+1)+\big(f(2,3)-H(2)\big)\prod_{k=4}^{n+1}x_k\\
&= f(n,n+1)
\end{aligned}$$

よって、$H(n)$ は $n=m-1$ における $f(n,m)$ の漸化式。
ここで $H(n,s)$ を次の様に置く。

$$H(n,s)=(-1)^{n+1}na(n,n+s)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,n+s)f(n-k,n+s)$$

$H(n,1)=H(n)$ であり、数学的帰納法より $H(n,s)=f(n,n+s)$ が成り立つ。
これにより、$f(n,m)$ の $m>n>1$ における漸化式が示された。

$$f(n,m)=(-1)^{n+1}na(n,m)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,m)f(n-k,m)$$

これにより漸化式の予想が正しいことがわかった。

$f(n,m),a(n,m)$ の極限を次の様に取る。

$$\begin{aligned}
F(n) &= \lim_{m\to\infty}f(n,m)\\
A(n) &= \lim_{m\to\infty}a(n,m)
\end{aligned}$$

漸化式がわかっているので、$F(n)$ が次の表示式を持つことが数学的帰納法より示せる。

$$F(n) = \sum_{(\sum_{t=1}^{n} t\alpha_t)=n} \Big(\big(\prod_{1\le u\le n} ((-1)^{u+1})^{\alpha_u} \big) \frac{n\big((\sum_{v=1}^{n} \alpha_v) - 1\big)!}{\prod_{1\le w\le n} \alpha_w!} \prod_{1\le x\le n} A(x)^{\alpha_x} \Big)$$

$F(n), A(n)$ に条件 $x_i = 0\ (i > m)$ を与えると、$F(n) = f(n,m), A(n) = a(n,m)$ となる。
これにより、 $f(n,m)$ の表示式が示せる。

$$f(n,m) = \sum_{(\sum_{t=1}^{m} t\alpha_t)=n} \Big(\big(\prod_{1\le u\le m} ((-1)^{u+1})^{\alpha_u} \big) \frac{n\big((\sum_{v=1}^{m} \alpha_v) - 1\big)!}{\prod_{1\le w\le m} \alpha_w!} \prod_{1\le x\le m} a(x,m)^{\alpha_x} \Big)$$

8 項の係数の性質

$f(n,m)$ は $n \neq 0$ の時、次の表示式で表される。

$$f(n,m) = \sum_{(\sum_{t=1}^{m} t\alpha_t)=n} \Big(\big(\prod_{1\leq u\leq m} ((-1)^{u+1})^{\alpha_u} \big) \frac{n((\sum_{v=1}^{m} \alpha_v)-1)!}{\prod_{1\leq w\leq m} \alpha_w!} \prod_{1\leq x\leq m} a(x,m)^{\alpha_x} \Big)$$

各項の係数の性質を調べる。

係数の正負は重要でないので、以降は項 $\displaystyle\prod_{1\leq x\leq m} a(x,m)^{\alpha_x}$ の係数を $\dfrac{n(\sum_{v=1}^{m} \alpha_v)!}{(\sum_{v=1}^{m} \alpha_v) \prod_{1\leq w\leq m} (\alpha_w!)}$ として考えても問題ない。

係数 $\dfrac{n(\sum_{v=1}^{m} \alpha_v)!}{(\sum_{v=1}^{m} \alpha_v) \prod_{1\leq w\leq m} (\alpha_w!)}$ が自然数になるのは定義より明らか。よって、n が素数ならば $\alpha_1 = n$ の場合を除いて係数は n の倍数になる。又、$\dfrac{n}{t}$ が整数ならば項 $a(t,m)^{\frac{n}{t}}$ の係数の絶対値が t になる事も計算よりわかる。

指数の最大公約数が $l = \gcd(\alpha_x)_{x=1}^{m}$ の時、$\alpha_x = l\beta_x$ と置け $l\displaystyle\sum_{t=1}^{m} t\beta_t = n$ が成り立つので l は n の約数である。さらに、$\dfrac{(\sum_{v=1}^{m} \alpha_v)!}{\prod_{1\leq w\leq m} (\alpha_w!)}$ が自然数は明らかなので、$\dfrac{ln(\sum_{v=1}^{m} \alpha_v)!}{(\sum_{v=1}^{m} \alpha_v) \prod_{1\leq w\leq m} (\alpha_w!)}$ は n が素の場合同様に n の倍数である。

表 2: $|t(\alpha, \beta)|$ の値

$\alpha \diagdown \beta$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	3	5	7	9	11	13	15
2	1	4	9	16	25	36	49	64
3	1	5	14	30	55	91	140	204
4	1	6	20	50	105	196	336	540
5	1	7	27	77	182	378	714	1254
6	1	8	35	112	294	672	1386	2640
7	1	9	44	156	450	1122	2508	5148

表 3: $p_{(\alpha,\beta)} + q_{(\alpha,\beta)}$ の値

$\alpha \diagdown \beta$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$1+1$	$1+1$	$1+1$	$1+1$	$1+1$	$1+1$	$1+1$	$1+1$
1	$1+0$	$2+1$	$3+2$	$4+3$	$5+4$	$6+5$	$7+6$	$8+7$
2	$1+0$	$3+1$	$6+3$	$10+6$	$15+10$	$21+15$	$28+21$	$36+28$
3	$1+0$	$4+1$	$10+4$	$20+10$	$35+20$	$56+35$	$84+56$	$120+84$
4	$1+0$	$5+1$	$15+5$	$35+15$	$70+35$	$126+70$	$210+126$	$330+210$
5	$1+0$	$6+1$	$21+6$	$56+21$	$126+56$	$252+126$	$462+252$	$792+462$
6	$1+0$	$7+1$	$28+7$	$84+28$	$210+84$	$462+210$	$924+462$	$1716+924$
7	$1+0$	$8+1$	$36+8$	$120+36$	$330+120$	$792+330$	$1716+792$	$3432+1716$

表 4: $p_{(\alpha,\beta)}$ の値

$\alpha \diagdown \beta$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	3	6	10	15	21	28	36
3	1	4	10	20	35	56	84	120
4	1	5	15	35	70	126	210	330
5	1	6	21	56	126	252	462	792
6	1	7	28	84	210	462	924	1716
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432