ニュートン多項式

学習院大学　理学部数学科
飯高研究室
07-043-066　山崎　朋幸

2010/2/2

目的

ニュートン多項式の表示式を求め、項の係数の法則性を調べる。

定義

基本対称式とは、次の $a(n,m)$ $\left(n \leq m\right)$ で表される対称式。

$$\begin{aligned} a_{(1,m)} &= x_1 + x_2 + \cdots + x_m \\ a_{(2,m)} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{m-1}x_m \\ a_{(m,m)} &= x_1x_2 \cdots x_{m-1}x_m \end{aligned}$$

ニュートン多項式とは、n 乗のべき和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} x_k^n$ を基本対称式で表した式の事で、以下 $f(n,m)$ で表す。

$f(n,m)$ の表示式は次の様な形をとる。

$$f(n,m) = \sum_{{}^{\forall}\alpha_k \in \mathbf{N}, (\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k) = n} \left(t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \prod_{j=1}^{n} a_{(j,m)}^{\alpha_j} \right)$$

ただし、$t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は $\{\alpha_l\}_{l=1}^{n}$ により定まる定数である。

各項の係数 $t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を調べる。

いきなり一般の$f(n,m)$を調べるのは大変なので、

まずは$m=2,3$の場合を調べる。

わかりやすくする為に、$f(n,2), f(n,3)$を次の様に置く。

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n,2) \\
&= x^n + y^n \\
g(n) &= f(n,3) \\
&= x^n + y^n + z^n
\end{aligned}
$$

さらに、基本対称式も次の様に置く。

$$
a_{(1,2)} = a, a_{(2,2)} = b
$$

$$
a_{(1,3)} = A, a_{(2,3)} = B, a_{(3,3)} = C
$$

$f(n), g(n)$ はそれぞれ $n \geq 2, n \geq 3$ の時、下の様な漸化式を持つことが数学的帰納法よりわかる。

$$f(n) = af(n-1) - bf(n-2)$$
$$g(n) = Ag(n-1) - Bg(n-2) + Cg(n-3)$$

この漸化式を用いて $f(n), g(n)$ を求めるプログラムを prolog で制作し、次の結果を得た。

Table 1. $0 \le n \le 10$ における $f(n), g(n)$ の基本対称式での表示

n	$f(n)$	$g(n)$
0	2	3
1	a	A
2	$a^2 - 2b$	$A^2 - 2B$
3	$a^3 - 3ab$	$A^3 - 3AB$ $+3C$
4	$a^4 - 4a^2b + 2b^2$	$A^4 - 4A^2B + 2B^2$ $+4AC$
5	$a^5 - 5a^3b + 5ab^2$	$A^5 - 5A^3B + 5AB^2$ $+5^A 2C - 5BC$
6	$a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 - 2b^3$	$A^6 - 6A^4B + 9A^2B^2 - 2B^3$ $+6A^3C - 12ABC$ $+3C^2$
7	$a^7 - 7a^5b + 14a^3b^2 - 7ab^3$	$A^7 - 7A^5B + 14A^3B^2 - 7AB^3$ $+7A^4C - 21A^2BC + 7B^2C$ $+7AC^2$
8	$a^8 - 8a^6b + 20a^4b^2 - 16a^2b^3 + 2b^4$	$A^8 - 8A^6B + 20A^4B^2 - 16A^2B^3 + 2B^4$ $+8A^5C - 32A^3BC + 24AB^2C$ $+12A^2C^2 - 8BC^2$
9	$a^9 - 9a^7b + 27a^5b^2 - 30a^3b^3 + 9ab^4$	$A^9 - 9A^7B + 27A^5B^2 - 30A^3B^3 + 9AB^4$ $+9A^6C - 45A^4BC + 54A^2B^2C - 9B^3C$ $+18A^3C^2 - 27ABC^2$ $+3C^3$

表を見る以下のような傾向が見られる。

- $n=0$の場合を除いて、項a^n, A^nの係数は1。
- nが素数の時、a^n, A^n以外の項の係数はnの倍数。
- a^n, A^n 以外の項の係数は1でないnの約数の倍数。
- 項の係数の正負は $(-1)^i$ $\left(i\text{は}b, B\text{の指数}\right)$ で決まる。
- $f(n)$は$g(n)$のCの指数0の部分和と同じ形。

これらを基に、係数の式を考える。

漸化式をニュートン多項式と基本対称式の定義を使って解くと、

項の係数 $t(\alpha,\beta), t(\alpha,\beta,\gamma)$ が次の式より求まることがわかる。

$$t(\alpha,\beta)=\begin{cases}2 & ,(\alpha+2\beta=0)\\ (-1)^{\beta}\dfrac{(\alpha+2\beta)(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta)\alpha!\beta!} & ,(\alpha+2\beta\neq 0)\end{cases}$$

$$t(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}3 & ,(\alpha,\beta,\gamma=0)\\ (-1)^{\beta}\dfrac{(\alpha+2\beta+3\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)!}{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha!\beta!\gamma!} & ,(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)\end{cases}$$

よって、$f(n), g(n)$ の表示式は次の様になる。

$$f(n) = \begin{cases} 2 & ,(n = 0) \\ \displaystyle\sum_{\alpha+2\beta=n} (-1)^{\beta} \frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta)\alpha!\beta!} a^{\alpha} b^{\beta} & ,(n \neq 0) \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} 3 & ,(n = 0) \\ \displaystyle\sum_{\alpha+2\beta+3\gamma=n} (-1)^{\beta} \frac{n(\alpha+\beta+\gamma)!}{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha!\beta!\gamma!} A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} & ,(n \neq 0) \end{cases}$$

$f(n), g(n)$ が以下の性質を持つ事が表示式よりわかる。

- $f(n)$ の表示式は $g(n)$ の表示式に条件 $A=a, B=b, C=0$ を与えた場合で、この条件は $z=0$ と同値。
- 項の正負は -1 の B 指数乗で決まる。
- 項 $A^n, B^{\frac{n}{2}}, C^{\frac{n}{3}}$ の係数の絶対値はそれぞれ $1, 2, 3$。
- 項 $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ の指数の最大公約数 $l\big(=\gcd(\alpha,\beta,\gamma)\big)$ は n の約数で、項の係数と l の積は n の倍数。

一般の $f(n,m)$ は次の漸化式と表示式を持つと予想できる。

$$f(n,m)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a(k,m)f(n-k,m) & ,(n\geq m)\\ \displaystyle(-1)^{n+1}na(n,m)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,m)f(n-k,m) & ,(m>n>1)\end{cases}$$

$$f(n,m)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{(\sum_{t=1}^{m}t\alpha_t)=n}\Big(\big(\prod_{1\leq u\leq m}((-1)^{u+1})^{\alpha_u}\big)\frac{n\big((\sum_{v=1}^{m}\alpha_v)-1\big)!}{\displaystyle\prod_{1\leq w\leq m}\alpha_w!}\prod_{1\leq x\leq m}a(x,m)^{\alpha_x}\Big) & n\neq 0\\ m & n=0\end{cases}$$

$f(0,m)=m, f(1,m)=a(1,m)$ は明らかである。

関数 $R(t,m)$ を次の様に置く。

$$\begin{aligned} R(t,m) &= \prod_{k=1}^{m}(t-x_k) \\ &= t^m - a(1,m)t^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1}a(m-1,n)t + (-1)^m a(m,m) \end{aligned}$$

t に x_i $(1 \leq i \leq m)$ を代入し t^m を左辺に移行すると次の式になる。

$$x_i^m = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}x_i^{m-k}a(k,m)$$

この式を x_i 倍した和から、 $f(n,m)$ の $n \geq m$ での漸化式が示せる。

$$f(n,m) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a(k,m)f(n-k,m)$$

関数 $H(n,s)$ を次の様に置く。

$$H(n,s)=(-1)^{n+1}na(n,n{+}s){+}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,n{+}s)f(n{-}k,n{+}s)$$

基本対称式とニュートン多項式の定義から、 $s=1,2\cdots$ の順に式を変形していくと $H(n,s)=f(n,n+s)$ が成り立つ。
よって $f(n,m)$ の $m>n$ での漸化式が示せる。

$$f(n,m)=(-1)^{n+1}na(n,m)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}a(k,m)f(n-k,m)$$

$F(n)=\lim_{m\to\infty}f(n,m), A(n)=\lim_{m\to\infty}a(n,m)$ $(n\neq 0)$ と置く。
漸化式と数学的帰納法により、$F(n)$ は次の表示式で表せる。

$$F(n)=\sum_{(\sum_{t=1}^{n}t\alpha_t)=n}\left(\Big(\prod_{1\le u\le n}((-1)^{u+1})^{\alpha_u}\Big)\frac{n\Big((\sum_{v=1}^{n}\alpha_v)-1\Big)!}{\prod_{1\le w\le n}\alpha_w!}\prod_{1\le x\le n}A(x)^{\alpha_x}\right)$$

$F(n), A(n)$ に $x_i=0$ $(i>m)$ を代入すると $f(n,m), a(n,m)$ になる。
よって $f(n,m)$ は次の表示式で表せる。

$$f(n,m)=\sum_{(\sum_{t=1}^{m}t\alpha_t)=n}\left(\Big(\prod_{1\le u\le m}((-1)^{u+1})^{\alpha_u}\Big)\frac{n\Big((\sum_{v=1}^{m}\alpha_v)-1\Big)!}{\prod_{1\le w\le m}\alpha_w!}\prod_{1\le x\le m}a(x,m)^{\alpha_x}\right)$$

$f(n), g(n)$ と同様に、 $f(n,m)$ は以下の性質を持つ。

- $f(n,m)$ の表示式は $f(n,m+1)$ に条件 $\Big(a(m+1,m+1) = 0, a(n,m+1) = a(n,m)\ (n \le m)\Big)$ を加えた式で、この条件は $x_{m+1} = 0$ と同値。
- $f(n,m)$ が項 $a(t,m)^{\frac{n}{t}}$ を持つならその係数の絶対値は t。
- 項 $\displaystyle\prod_{1 \le x \le m} a(x,m)^{\alpha_x}$ の指数の最大公約数 $l\Big(=\gcd(\alpha_x)_{x=1}^{m}\Big)$ は n の約数で、項の係数と l の積は n の倍数。